Prof. Dr. E. W. Farkas **ETH Zürich, August 2013**

BIOL-B HST PHARM

Prüfung zur Vorlesung Mathematik I/II

Bitte ausfüllen!

Name:	
Vorname:	
Legi-Nr.:	

Nicht ausfüllen!

Aufgabe	Punkte		Kontrolle	
	MC	Total	MC	Total
1	-		-	
2	-		-	
3				
4				
5				
6	-		-	
Total				

Vollständigkeit	

Bitte wenden!

Wichtige Hinweise zur Prüfung

Prüfungsdauer: 3 Stunden.

Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten (nicht Blätter!) mit persönlichen, von Hand geschriebenen Notizen. Keine (Taschen)Rechner. 1 Wörterbuch für fremdsprachige Studierende.

Bitte beachten Sie folgende Punkte:

- Tragen Sie **jetzt** Ihren Namen in das Deckblatt ein und geben Sie es **am Ende** der Prüfung als vorderstes Blatt Ihrer Arbeit ab.
- Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch.
- Beginnen Sie jede Aufgabe **auf einem neuen Blatt**.
- Begründen Sie Ihre Lösungen, soweit nicht anders angegeben. Dabei können Sie bekannte Formeln aus der Vorlesung und den Übungen ohne Herleitung verwenden.
- Schreiben Sie **nicht** mit Bleistift, rotem oder grünem Kugelschreiber.
- Die Reihenfolge der Bearbeitung der Aufgaben ist Ihnen freigestellt. Ordnen Sie jedoch am Ende der Prüfung die Aufgaben für die Abgabe.
- Wir erwarten nicht, dass Sie alle Aufgaben lösen. Versuchen Sie einfach Ihr Bestes!
  Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet.
- Bei einer **Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe)** sind jeweils 4 Aussagen/Antworten angegeben, davon sind jeweils genau 2 korrekt.

  Eine MC-Aufgabe ist genau dann korrekt gelöst, wenn Sie die 2 korrekten Antworten mit "richtig" **und** die 2 inkorrekten mit "falsch" kennzeichnen. Sie müssen also bei jeder MC-Aufgabe genau 4 Kreuze setzen und jedes muss jeweils an der richtigen Stelle sein.

  Zum Beispiel ist folgende MC-Aufgabe nur mit diesen 4 Kreuzen korrekt gelöst.

richtig	**falsch**	
$\otimes$	$\bigcirc$	Hier steht eine korrekte Aussage/Antwort.
$\otimes$	$\bigcirc$	Hier steht eine korrekte Aussage/Antwort.
$\bigcirc$	$\otimes$	Hier steht eine inkorrekte Aussage/Antwort.
$\bigcirc$	$\otimes$	Hier steht eine inkorrekte Aussage/Antwort.

  Bei den MC-Aufgaben werden nur die Antworten auf den **Aufgabenblättern** bewertet. Die Antworten in den MC-Aufgaben müssen nicht begründet werden.

Viel Erfolg!

Siehe nächstes Blatt!

Aufgaben

---

1. (*10 Punkte*)

Die Antworten in Teilaufgaben **1.a)** bis **1.f)** müssen Sie **nicht** begründen. Schreiben Sie die Antworten zu diesen Teilaufgaben **vollständig gekürzt und vereinfacht** direkt auf das Aufgabenblatt. Antworten zu diesen Teilaufgaben auf anderen Blättern werden nicht bewertet.

a) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^4+5x^2+1}{3x^4+x^2+x+1} = \underline{\hspace{3cm}}.$$

b) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x\,\sin(x)} = \underline{\hspace{3cm}}.$$

c) Geben Sie alle Nullstellen von x^3-2x^2-x+2 an: ____________________________.

d) Sei f die Funktion mit $f(x)=(\cos x)^x$ und $x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Bestimmen Sie die Ableitung

$$f'(x) = \underline{\hspace{8cm}}.$$

e) Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int x^2 \ln(x)\,dx = \underline{\hspace{7cm}}.$$

f) Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ die Taylorreihe der Funktion

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1+x^3}$$

(im Punkt $x_0=0$). Bestimmen Sie $a_0 =$ ________; $a_1 =$ ________; $a_2 =$ ________.

g) Gegeben sei die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit

$$f(x) = e^x - x - 1.$$

Zeigen Sie, dass f auf $]0,\infty[$ streng monoton wachsend ist.

Bitte wenden!

2. (*10 Punkte*)
Schreiben Sie die Antworten **vollständig gekürzt und vereinfacht**.

Hier bezeichnet i die imaginäre Einheit. Es gilt also $i^2 = -1$.

a) Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil von $z = (1+i)^4 - 2i$.

b) Schreiben Sie folgende komplexe Zahlen in der Form $re^{\varphi i}$ mit $r > 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi[$:

$$z_1 = 2 + 2\sqrt{3}i, \quad z_2 = 5\left(\cos\tfrac{1}{2} - i\sin\tfrac{1}{2}\right), \quad z_3 = ie^{\frac{\pi}{6}i}.$$

c) Berechnen Sie $\left(\dfrac{1-3i}{i-2}\right)^6$.

d) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$(z-i)^3 = 8.$$

Siehe nächstes Blatt!

3. (*10 Punkte*)

a) MC-Aufgabe

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind, und kreuzen Sie die entsprechende Antwort direkt **auf dem Aufgabenblatt** an.

In dieser Teilaufgabe seien

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 17 & 18 & 19 \\ 27 & 28 & 29 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 100 \\ 1000 \end{pmatrix}.$$

richtig	**falsch**	
○	○	Es gilt $\operatorname{Rang}(A) = 2$.
○	○	Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ ist lösbar.
○	○	Der Rang einer Dreiecksmatrix ist die Anzahl der von 0 verschiedenen Diagonalelemente.
○	○	Sei B eine quadratische Matrix. Ist d eine der Spalten von B, so hat das lineare Gleichungssystem $Bx = d$ stets mindestens eine Lösung.

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 6 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ t \end{pmatrix}$$

linear unabhängig?

d) Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ 3 & 8 & 1+4a \\ -2 & a-6 & a^2+1 \end{pmatrix}, \qquad \text{mit} \qquad a \in \mathbb{R}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie mittels des Gaussverfahrens:

i) alle $a \in \mathbb{R}$ für die das Gleichungssystem $Ax = b$ keine Lösung hat,
ii) alle $a \in \mathbb{R}$ für die das Gleichungssystem $Ax = b$ genau eine Lösung hat,
iii) alle $a \in \mathbb{R}$ für die das Gleichungssystem $Ax = b$ unendlich viele Lösungen hat.

4. *(12 Punkte)*

a) MC-Aufgabe

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind, und kreuzen Sie die entsprechende Antwort direkt **auf dem Aufgabenblatt** an.

Wir betrachten die Differentialgleichung (DGL)

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

richtig	falsch	
○	○	Für $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$ ist $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der DGL (1).
○	○	Für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist die DGL (1) eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.
○	○	Für $a = 1$, $b = 5$, $c = 4$ ist $y(x) = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{-x}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der DGL (1).
○	○	Für $a = 2$, $b = 3$, $c = 0$ ist jede Lösung der DGL (1) von der Form $y(x) = K$ für eine Konstante $K \in \mathbb{R}$.

b) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$x^2 y'(x) = y(x)^2 - xy(x) + x^2, \qquad y(2) = 0,$$

mittels Separation der Variablen.
Hinweis: Benutzen Sie eine geeignete Substitution.

c) Wir betrachten die folgende Differentialgleichung

$$y'(x) + 2\sin(x)\cos(x)y(x) - e^{\cos(x)^2 - x} = 0. \tag{2}$$

i) Schreiben Sie die dazugehörige homogene Differentialgleichung auf und finden Sie deren allgemeine Lösung.

ii) Bestimmen Sie nun die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (2).

5. (*8 Punkte*)

a) MC-Aufgabe

Welche der folgenden Aussagen über die Funktion $f(x, y) = x^2 - y^4 + 6y^2 - 4xy$ sind richtig? Kreuzen Sie die entsprechende Antwort direkt **auf dem Aufgabenblatt** an.

richtig	falsch	
◯	◯	$(2, 1)$ ist ein kritischer Punkt.
◯	◯	$(-2, -1)$ ist ein lokales Minimum.
◯	◯	$(-2, -1)$ ist ein lokales Maximum.
◯	◯	$(2, 1)$ ist ein Sattelpunkt.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche

$$z = x^3 + 3xy + y^2 + 2y$$

im Flächenpunkt $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 7)$.

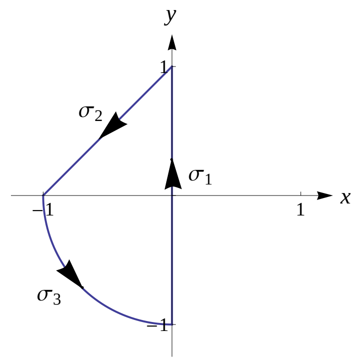
c) Bestimmen Sie die Extrema der Funktion

$$f(x, y) = (x + 2y)^3$$

unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.

6. (*10 Punkte*)

a) In folgender Skizze sehen Sie drei ebene Kurven σ_1 und σ_2 und σ_3: σ_2 liegt auf einer Geraden und σ_3 ist ein Ausschnitt des Einheitskreisbogens. Die Pfeile kennzeichnen die Durchlaufrichtung.



Geben Sie für σ_1, σ_2 und σ_3 jeweils eine Funktion an, welche die Kurve parametrisiert. Berücksichtigen Sie dabei die Durchlaufrichtung. Schreiben Sie Ihre Antwort direkt **auf das Aufgabenblatt**.

$$\sigma_1 : t \mapsto \sigma_1(t) = \begin{pmatrix} \qquad\qquad \\ \\ \end{pmatrix}, \qquad \underline{\qquad\qquad} \le t \le \underline{\qquad\qquad}.$$

$$\sigma_2 : t \mapsto \sigma_2(t) = \begin{pmatrix} \qquad\qquad \\ \\ \end{pmatrix}, \qquad \underline{\qquad\qquad} \le t \le \underline{\qquad\qquad}.$$

$$\sigma_3 : t \mapsto \sigma_3(t) = \begin{pmatrix} \qquad\qquad \\ \\ \end{pmatrix}, \qquad \underline{\qquad\qquad} \le t \le \underline{\qquad\qquad}.$$

b) Gegeben seien nun drei ebene Kurven γ_1 und γ_2 und γ_3 parametrisiert durch

$$\gamma_1 : t \mapsto \gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 1,$$

$$\gamma_2 : t \mapsto \gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ 1-(1-t)^2 \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 1, \quad \text{und}$$

$$\gamma_3 : t \mapsto \gamma_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1-t \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 1.$$

Mit γ bezeichnen wir die geschlossene Kurve, die sich ergibt, wenn man γ_1, γ_2 und γ_3 nacheinander durchläuft.

i) Zeichnen Sie die Kurven γ_1, γ_2 und γ_3 in ein Koordinatensystem. Geben Sie dabei auch jeweils die Durchlaufrichtung an.

ii) Sei $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld

$$K : (x,y) \mapsto K(x,y) = \Big(P(x,y), Q(x,y)\Big) = \Big(x+y, x^2\Big).$$

Berechnen Sie mit der Formel von Green das Kurvenintegral für K entlang γ:

$$\oint_\gamma K \cdot d\gamma = \oint_\gamma (x+y)dx + x^2 dy$$

Siehe nächstes Blatt!

iii) Berechnen Sie die folgenden Linienintegrale

$$I_1 = \int_{\gamma_1} (x+y)\,dx + x^2\,dy$$

$$I_2 = \int_{\gamma_2} (x+y)\,dx + x^2\,dy$$

$$I_3 = \int_{\gamma_3} (x+y)\,dx + x^2\,dy.$$