Dr. A. Caspar **ETH Zürich, August 2014**

BIOL-B HST PHARM

Prüfung zur Vorlesung Mathematik I/II

---

1. (*8 Punkte*)

a) Mit Kürzen des Bruchs folgt

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+\sin(x)-\sin(x)\cos(x)}{\sin(x)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin(x)}+1-\cos(x)\right)=1.$$

Alternativ folgt die Lösung mit L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+\sin(x)-\sin(x)\cos(x)}{\sin(x)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\cos(x)-\cos(x)^2+\sin(x)^2}{\cos(x)}\right)=1.$$

b) Für einen Fixpunkt gilt $f(x_\infty)=x_\infty$, damit folgt $x_{\infty,1}=-\frac{1}{2}, \quad x_{\infty,2}=\frac{1}{2}$.

c) Teste die Bedingung $|f'(x_{\infty,i})|<1$ für $i=1,2$.

Das stimmt für $x_{\infty,1}=-\frac{1}{2}$, jedoch nicht für $x_{\infty,2}=\frac{1}{2}$. Damit folgt für den Fixpunkt $\underline{x_\infty=-\frac{1}{2}}$ gilt: Für jeden Startwert x_0 in der Nähe von $x_\infty=-\frac{1}{2}$ konvergiert die Folge (x_n) gegen x_∞.

d) Es ist $x_0=1$ ein Fixpunkt, also $f(1)=1$ und damit auch $f^{-1}(1)=1$. Darum ist

$$(\underbrace{f^{-1}\circ f^{-1}\circ\ldots\circ f^{-1}}_{2014 \text{ Stück}})(1)=(\underbrace{f^{-1}\circ f^{-1}\circ\ldots\circ f^{-1}}_{2013 \text{ Stück}})(f^{-1}(1))=\ldots=1.$$

e) Mit Substitution $t=\sqrt{x}$ und partieller Integration folgt

$$\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\,dx=\int_1^2 e^t\,2t\,dt=e^t\,2t\Big|_1^2-\int_1^2 2e^t\,dt=2\,e^2$$

f) Mit dem Hauptsatz ist $\mu=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\ dx=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{M_0}{(x+1)^2}\ dx=\frac{M_0}{T+1}$ und daher

richtig	falsch	
$\otimes$	$\bigcirc$	$M_0=1,\ T=1.$
$\bigcirc$	$\otimes$	$M_0>5,\ T=2.$
$\otimes$	$\bigcirc$	$M_0=\frac{3}{2},\ T=1.$
$\bigcirc$	$\otimes$	$M_0=\frac{3}{2},\ T=\frac{1}{3}.$

2. (*14 Punkte*)

a) Wir sehen $A^2 = \begin{pmatrix} \cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi) & -2\cos(\varphi)\sin(\varphi) & 0 \\ 2\cos(\varphi)\sin(\varphi) & \cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und mit den Additionstheoremen $A^2 = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & -\sin(2\varphi) & 0 \\ \sin(2\varphi) & \cos(2\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und damit $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 2\varphi$.

richtig	**falsch**	
$\otimes$	$\bigcirc$	$\alpha = \beta = \gamma = \delta$
$\otimes$	$\bigcirc$	$\alpha = \delta = 2\varphi$
$\bigcirc$	$\otimes$	$\beta = \gamma = \varphi^2$
$\bigcirc$	$\otimes$	$\beta = -\gamma$

b) Da $A^4 = \begin{pmatrix} \cos(4\varphi) & -\sin(4\varphi) & 0 \\ \sin(4\varphi) & \cos(4\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, gilt für die Winkel $0 < \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2} < 2\pi$ somit $A^4 = E_3$.

c) Die Eigenwerte sind die Lösungen der Gleichung $(\sqrt{3}-\lambda)^2+1 = \lambda^2 - 2\sqrt{3}\lambda + 4 = 0$ und damit

Kartesisch

$$\lambda_1 = \sqrt{3} + i, \quad \lambda_2 = \sqrt{3} - i.$$

Polar

$$\lambda_1 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}, \quad \lambda_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

d) Wende die Matrix auf den Vektor an. Mit der Gleichung $Bv = \lambda v$ folgt dann $b = y = 1$.

e)

richtig	**falsch**	
$\bigcirc$	$\otimes$	$\widetilde{B} = \frac{1}{4}B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}$. Gegenbeispiel: $\widetilde{B} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}$.
$\otimes$	$\bigcirc$	$\widetilde{B}$ ist invertierbar.
$\otimes$	$\bigcirc$	Sei $v_n = \left(\widetilde{B}\right)^n v_0$. Für jeden Startvektor v_0 konvergiert die Folge der Vektoren v_n gegen den Nullvektor. Begründung: $\lvert\mu_1\rvert < 1$ und $\lvert\mu_2\rvert < 1$.
$\bigcirc$	$\otimes$	$\frac{\det(B)}{4} = \det(\widetilde{B})$. Es ist $\det(\widetilde{B}) = \frac{\det(B)}{16}$.

f) Mit Gauss-Verfahren folgt:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 7 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 7 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \end{array}\right]$$

Dann $x_3 = -3$, deswegen ist $x_2 = 4$ und $x_1 = 5$. Dass heisst

$$x = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden!

3. (*12 Punkte*)

a) Die DGL ist

$$y'(x)(1-y(x)) + y(x) = a(1-y(x)). \tag{1}$$

richtig	falsch	
$\otimes$	$\bigcirc$	Für jedes $a \in \mathbb{R}$, hat die DGL (1) unendlich viele Lösungen.
$\bigcirc$	$\otimes$	Für jedes $a \in \mathbb{R}$, hat die DGL (1) mindestens eine stationäre Lösung. (Für $a = -1$ gibt es keine.)
$\otimes$	$\bigcirc$	Für $a = 2$ ist die Lösungsfunktion f der DGL (1) mit einem Anfangswert $y(0) = 2$ streng monoton wachsend. (Weil $y'(0) = \frac{y(0)}{y(0)-1} + a = 4 > 0$ und für $z > 2$ ist auch $\frac{z}{z-1} + 2 > 0$).
$\bigcirc$	$\otimes$	Für $a = \frac{1}{2}$ ist die Lösungsfunktion f der DGL (1) mit einem Anfangswert $y(0) = \frac{1}{2}$ streng monoton wachsend. (Weil $y'(0) = \frac{y(0)}{y(0)-1} + a = -\frac{1}{2} < 0$).

b) Für eine stationäre Lösung y_∞ gilt $y_\infty^2 - \dfrac{1}{4} = 0$. Also $y_{\infty,1} = -\dfrac{1}{2}$ und $y_{\infty,2} = \dfrac{1}{2}$.

Das **Richtungsfeld 3** ist korrekt.

c) Die dazugehörige homogene Differentialgleichung ist von der Form

$$y'(x) = -\sin(x)y.$$

Via Trennung der Variablen sehen wir direkt, dass die allgemeine Loösung der homogenen DGL von der Form

$$y_{\text{hom}} = Ke^{\cos(x)}$$

ist. Um die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu finden, verwenden wir die Methode der Variation der Konstanten. Für die allgemeine Lösung y_{allg} verwenden wir den Ansatz

$$y_{\text{allg}} = K(x)e^{\cos(x)}.$$

Durch Ableiten erhalten wir

$$y'_{\text{allg}} = K'(x)e^{\cos(x)} - K(x)\sin(x)e^{\cos(x)}.$$

Siehe nächstes Blatt!

Durch Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung erhalten wir

$$K'(x)e^{\cos(x)} - K(x)\sin(x)e^{\cos(x)} = -\sin(x)K(x)e^{\cos(x)} + e^{\cos(x)+x}$$

Daraus folgern wir $K'(x) = e^x$ und daher

$$K(x) = e^x + \widetilde{K}.$$

Durch die Wahl unseres Ansatzes schliessen wir

$$y_{\text{allg}} = (e^x + \widetilde{K})e^{\cos(x)}.$$

Mit dem Anfangswert $y(\frac{\pi}{2}) = 1$ folgt $K = 1 - e^{\pi/2}$. Die Lösung lautet somit

$$y(x) = (e^x + 1 - e^{\pi/2})e^{\cos(x)}.$$

d) Die dazugehörige homogene Differentialgleichung ist

$$y''(x) - 5y'(x) + 4y(x) = 0$$

Die Charakteristische Gleichung ist

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0.$$

Mit Lösungen $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 4$ folgt die allgemeine Lösung

$$y = C_1e^x + C_2e^{4x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

4. (*10 Punkte*)

a) Es ist

$$f_x(x,y) = e^{x+2y} + 5\sin(5x-5y)) - 3x^2$$

und

$$f_y(x,y) = 2e^{x+2y} - 5\sin(5x-5y).$$

b) Sei $K(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$. Nach der Formel von Green ist der Wert des gesuchten Kurvenintegrals gleich dem Gebietsintegral der Funktion $Q_x - P_y$ über die von γ eingeschlossene Fläche.

Da hier $Q_x - P_y = 0$ die Nullfunktion ist, verschwindet auch das Kurvenintegral $\oint_\gamma K \cdot d\gamma = 0$.

c) i) Durch Einsetzen von $y = -x-1$ in $x^2 - y^2 - 3xy + 1 = 0$ erhalten wir

$$3x^2 + x = 0$$

und finden die Schnittpunkte $(x_1, y_1) = (0, -1)$ und $(x_2, y_2) = (-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$.

ii) Wir bestimmen die Steigung der Tangente an die Kurve im Punkt (x_0, y_0) mit Impliziter Differentiation:

$$y'(x_0) = -\frac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)} = -\frac{2x_0 - 3y_0}{-2y_0 - 3x_0}$$

Im Punkt $(x_0, y_0) = (0, -1)$, dass ergibt $y' = -\frac{3}{2}$ und die Tangentialgerade ist gegeben durch

$$y = y'(x - x_0) + y_0 = -\frac{3}{2}x - 1.$$

d) Die Tangentialebene an $z = f(x,y)$ im Punkt (x_0, y_0) ist

$$z = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) + f(x_0,y_0).$$

Für unsere Funktion hier ist es

$$z = 2(x_0 - 2)(x - x_0) + 2(y_0 + 3)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

und nach Einsetzen der Punkte

$$E_1: \quad 6 - 2x + 2y = z \qquad\qquad E_2: \quad 11 - 4x + 6y = z.$$

richtig	**falsch**	
$\otimes$	$\bigcirc$	Der Punkt $(0,0,6)$ liegt auf E_1.
$\bigcirc$	$\otimes$	Der Punkt $(1,-1,2)$ liegt auf E_1 und E_2.
$\bigcirc$	$\otimes$	Der Punkt $(1,-1,2)$ liegt auf E_2.
$\otimes$	$\bigcirc$	Der Punkt $(-\frac{3}{2}, -2, 5)$ liegt auf E_1 und E_2.

5. (*16 Punkte*)

a) Wir prüfen, ob die notwendige Bedingung $(F_1)_y = (F_2)_x$ erfüllt ist. Da der Definitionsbereich $\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend ist, ist dies auch hinreichend.

richtig	**falsch**	
⊗	○	$F(x,y) = \begin{pmatrix} 2x\sin(y) \\ x^2\cos(y) \end{pmatrix}$. Potenzial: $x^2\sin(x)$
○	⊗	$F(x,y) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\cos(x)\sin(y)} \\ \mathrm{e}^{\cos(x)\sin(y)} \end{pmatrix}$.
⊗	○	$F(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2xy}{x^2+1} \\ \ln(x^2+1) \end{pmatrix}$. Potenzial: $y\log(x^2+1)$
○	⊗	$F(x,y) = \begin{pmatrix} 9x^2y^2 - 4xy^3 \\ 6x^2y^2 - 6x^3y \end{pmatrix}$.

b)

$$\sigma_1 : t \mapsto \sigma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad 0 \le t \le 1.$$

$$\sigma_2 : t \mapsto \sigma_2(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos(t) \\ \sqrt{2}\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\pi}{4} \le t \le \frac{7\pi}{4}.$$

$$\sigma_3 : t \mapsto \sigma_3(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ t-1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad 0 \le t \le 1.$$

c) Es ist

$$\iint_S f(x,y,z)\, dS = \iint_S 1\, dS = \text{ Flächeninhalt von } S = 2\pi(1 - \frac{1}{4}) = \frac{3}{2}\pi$$

Alternativ können wir das Oberflächenintegral als Gebietsintegral berechnen, da S eine ebene Fläche ist und sich damit selbst parametrisiert.

Mit Polarkoordinaten ergibt sich

$$\iint_S f(x,y,z)\, dS = \int_{\varphi=\pi/4}^{7\pi/4} \int_{r=0}^{\sqrt{2}} r \,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \frac{6}{4}\pi \cdot \frac{2}{2} = \frac{3}{2}\pi.$$

Bitte wenden!

d) Es sind

$$
\begin{aligned}
\int_{\sigma_{\mathbf{1}}} K\cdot d\gamma &= \int_0^1 (t^2+t^2,1,0)\cdot(1,1,0)dt = \int_0^1 (2t^2+1)dt = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}},\\
\int_{\sigma_{\mathbf{2}}} K\cdot d\gamma &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} (2\cos(t)^2+2\sin(t)^2,1,0)\cdot(-\sqrt{2}\sin(t),\sqrt{2}\cos(t),0)dt\\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} [-2\sin(t)+\cos(t)]dt = -\mathbf{2},\\
\int_{\sigma_{\mathbf{3}}} K\cdot d\gamma &= \int_0^1 ((t-1)^2+(1-t)^2,1,0)\cdot(-1,1,0)dt\\
&= \int_0^1 -2t^2+4t-1dt = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}.
\end{aligned}
$$

e) $n_3 = 1$.

f) Die Voraussetzungen für den Satz von Stokes sind gegeben, und es gilt

$$
\iint_S \operatorname{rot}(K)\cdot n\,dS = \oint_{\partial S} K\cdot d\gamma = \sum_{i=1}^{3}\int_{\sigma_i} K\cdot d\gamma = 0
$$