Prof. Dr. E. W. Farkas **ETH Zürich, August 2015**

D–BIOL, D–CHAB

Lösungen zu Mathematik I/II

Aufgaben

---

1. (*10 Punkte*)

a) 0.

b) ∞, 0.

c) 0.

d) $x\sin(x) + \cos(x) + C$.

e) $A = -\frac{1}{2}$, $B = 2$, $C = -\frac{1}{2}$.

f) $a_0 = e^2$, $a_1 = 3e^2$, $a_2 = 4e^2$.

g) $c = 1$, $d = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$.

2. (*10 Punkte*)

a)

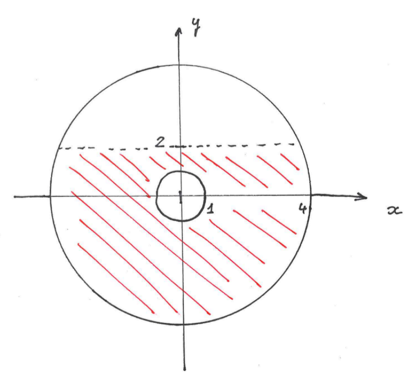

Abbildung 1: Die Menge M.

b)

$$\frac{3+7i}{4-2i} = \frac{(3+7i)(4+2i)}{20} = -\frac{1}{10} + i\frac{17}{10}.$$

$$\overline{5i\Big(\frac{1}{4} - i\Big)} = -5i\Big(\frac{1}{4} + i\Big) = 5 - i\frac{5}{4}.$$

c) i) Es gilt

$$\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

mithilfe der Eulerschen Formel. Also ist

$$z = \Big(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)^{50} = (e^{i\frac{\pi}{3}})^{50} = e^{i\frac{50\pi}{3}} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

und damit $r = 1$ und $\varphi = \frac{2\pi}{3}$.

ii) Wegen i) erhält man

$$z \overset{\text{i)}}{=} e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

d) Es gilt

$$\omega = 4\Big[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\Big](4+di) = 2\sqrt{2}(1+i)(4+di)$$

und damit

$$\mathrm{Re}(\omega) = 2\sqrt{2}(4-d) = 0$$

nur für $d = 4$.

3. (*10 Punkte*)

a) i)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

ii)

$$\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1.$$

iii) Nein, denn A ist nicht invertierbar und $\mathrm{Rang}(A) \neq \mathrm{Rang}(A|b)$.

b) Das charakteristische Polynom lautet

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 - 3\cdot 3 = (\lambda-5)(\lambda+1).$$

Die Eigenwerte sind also $\lambda = 5, -1$.

Sei $v = (v_1, v_2)^T$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 5. Dann gilt

$$0 = (A - 5I)v = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} v.$$

Dies löst man zum Beispiel mit Gauss Elimination durch Addition der beiden Zeilen, und erhält

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v = 0.$$

Also gilt $-3v_1 + 3v_2 = 0$ und die Eigenvektoren zum Eigenwert 5 haben die Form

$$c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit c eine beliebige Konstante.

Sei u ein Eigenvektor zum Eigenwert -1, dann gilt

$$0 = (A + I)v = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} u.$$

Eine ähnliche Rechnung ergibt, dass die zugehörigen Eigenvektoren von der Form

$$c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

mit c beliebig, sind.

c)

$$\det = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & t & -1 \\ 0 & 4 & t \end{pmatrix} = i(t^2 + 4).$$

Für $t \neq \pm 2i$ sind die Vektoren linear unabhängig.

d) Gauss Elimination:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & -8 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

Zeilen 1 und 2 vertauschen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -8 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

Zeile 1 zu Zeile 3 addieren

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -8 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

Multipliziere Zeile 2 mit 1/2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -4 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

Addiere 2. Zeile und 3. Zeile

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -4 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \end{array}\right)$$

Mutipliziere Zeile 3 mit -2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Addiere $-\frac{1}{2}$ mal 3. Zeile zur 2. Zeile

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Addiere -2 mal 2. Zeile und -3 mal 3. Zeile zur 1. Zeile

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Also lautet die Lösung

$$x_1 = -4, \quad x_2 = -5, \quad x_3 = 2.$$

4. (*10 Punkte*)

a) i) Die homogene Gleichung lautet

$$y' + \frac{1}{x} y = 0$$

Separation der Variablen ergibt

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}.$$

Nun integriert man auf beiden Seiten, und erhält

$$y_H = \exp\left(\int -\frac{1}{x} dx\right) = \exp(-\ln x + C_0) = \frac{C_1}{x}$$

wo C_0 und C_1 beliebige Konstanten sind.

ii) Wir versuchen, eine Lösung der Form

$$y(x) = \frac{C(x)}{x}.$$

zu finden. Dann muss $C(x)$

$$\frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x^2} = \frac{1}{x^2},$$

erfüllen, also

$$C'(x) = \frac{1}{x}.$$

Deswegen ist

$$C(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C_2$$

wobei C_2 eine beliebige Konstante darstellt. Die allgemeine Lösung lautet demnach

$$y(x) = \frac{\ln x + C_2}{x}.$$

iii) Man berechnet die Konstante C_2 wie folgt. Die Anfangsbedingung ist $y(1) = 2$, also gilt

$$y(1) = \frac{\ln 1 + C_2}{1} = C_2 = 2.$$

Insgesamt ist

$$y(x) = \frac{\ln x + 2}{x}.$$

b) i) Die homogene Gleichung lautet

$$y'' + y' - 6y = 0.$$

Die charakteristische Gleichung ist

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3) = 0$$

mit Lösungen $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3$. Also lautet die allgemeine Lösung

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}.$$

ii) Man substituiert $y = ax + b$ in die Differentialgleichung und erhält

$$a - 6(ax + b) = 6x.$$

Also ist $-6a = 6$ und $a - 6b = 0$, demnach

$$a = -1, b = -\frac{1}{6}.$$

iii) Die allgemeine Lösung lautet

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x} - x - \frac{1}{6}.$$

Die Anfangswerte $y(0) = -\frac{1}{6}$ und $y'(0) = 4$ ergeben

$$y(0) = c_1 + c_2 - \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}$$
$$y'(0) = 2c_1 - 3c_2 - 1 = 4.$$

Also gilt $c_1 = 1, c_2 = -1$. Die Lösung lautet somit

$$y = e^{2x} - e^{-3x} - x - \frac{1}{6}.$$

5. (*10 Punkte*)

a) Schreibe $z = f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Wir wissen, dass $f_x = 2x$ und $f_y = 2y$. Die Tangentialebene in $(2, 1, 4)$ lautet

$$z - 4 = 4(x - 2) + 2(y - 1).$$

Die Tangentialebene in $(2, 0, 3)$ lautet

$$z - 3 = 4(x - 2).$$

b) Die partiellen Ableitungen 1. Ordnung lauten

$$f_x(x, y) = 4x + 2y - 6$$
$$f_y(x, y) = 2x + 4y.$$

Die kritischen Punkte erfüllen gleichzeitig die Bedingungen $f_x(x, y) = 0, f_y(x, y) = 0$. Also gilt

$$4x + 2y - 6 = 0$$
$$2x + 4y = 0.$$

Dieses System hat eine einzige Lösung im Punkt $(2, -1)$. Die partiellen Ableitungen 2. Ordnung sind

$$f_{xx}(x, y) = 4$$
$$f_{yy}(x, y) = 4$$
$$f_{xy}(x, y) = 2.$$

Berechne die Determinante

$$D = f_{xx}(2, -1) f_{yy}(2, -1) - f_{xy}^2(2, -1) = 4 \cdot 4 - 2^2 = 12 > 0.$$

Da $f_{xx}(2, -1) > 0$, hat f ein lokales Minimum im Punkt $(2, -1)$.

c) Wir wollen die Grösse $x^2 + y^2 + z^2$ unter der Nebenbedingung $x + 2y + 3z = 7$ minimieren. Wir verwenden Lagrange-Multiplikatoren. Schreibe

$$L(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x + 2y + 3z - 7).$$

Die Punkte $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0)$ mit $\vec{\nabla} L = 0$ sind die Lösungen folgender Gleichungen:

$$\begin{aligned} 2x + \lambda &= 0 \\ 2y + 2\lambda &= 0 \\ 2z + 3\lambda &= 0 \\ x + 2y + 3z - 7 &= 0 \end{aligned}$$

Also gilt $x_0 = -\frac{\lambda_0}{2}, y = -\lambda_0, z = -\frac{3\lambda_0}{2}$ und nach Einsetzen in die letzte Gleichung $-\frac{\lambda_0}{2} - 2\lambda_0 - \frac{9\lambda_0}{2} - 7 = 0$. Damit ist $\lambda_0 = -1$, also $x_0 = \frac{1}{2}, y_0 = 1, z_0 = \frac{3}{2}$.
Der gesuchte Punkt ist $P = (\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2})$.

6. (*10 Punkte*)

a)

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= (\cos t, \sin t), && t \in [0, \pi] \\ \gamma_2(t) &= (t, t^2 - 1), && t \in [-1, 1] \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\pi (\sin t) \cdot (-\sin t)\, dt + 2(\cos t) \cdot (\cos t)\, dt \\ &= \int_0^\pi \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos(2t)\, dt = \frac{\pi}{2} + \left| \frac{3}{4} \sin(2t) \right|_0^\pi = \frac{\pi}{2}. \\ I_2 &= \int_{-1}^1 (t^2 - 1) dt + 2t \cdot 2t dt = \int_{-1}^1 (5t^2 - 1) dt = \left| \frac{5}{3} t^3 - t \right|_{-1}^1 = \frac{4}{3}. \\ I &= I_1 + I_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

c) Der Satz von Green ergibt

$$I = \int\int_A (2 - 1) dA = \int\int_A dA$$

wo A die von γ eingeschlossene Fläche ist.

Die Fläche von A ist die Summe der Teilflächen von A ober- und unterhalb der x-Achse, also gilt

$$\begin{aligned} I &= \int\int_A dA = \int_{\omega=0}^\pi \int_{r=0}^1 1 \cdot r dr d\omega + \int_{x=-1}^1 \int_{y=x^2-1}^0 1 \cdot dy\, dx \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{4}{3}. \end{aligned}$$