Dr. A. Caspar **ETH Zürich, Sommer 2016**

D-BIOL, D-CHAB, D-HEST

Prüfung zur Vorlesung Mathematik I/II

---

1. (*12 Punkte*)

a) (*2 Punkte*) Die Ableitung ist

$$f'(x) = \cos(x) - (\cos(x) - x\sin(x)) = x\sin(x).$$

Für einen Fixpunkt von f' muss gelten $f'(x) = x\sin(x) \overset{!}{=} x$. Daraus folgt, dass entweder $x = 0$ (schon auf dem Aufgabenblatt angegeben) oder $\sin(x) = 1$. Diese letzte Gleichung hat für x im Intervall $[0, 2\pi]$ genau eine Lösung und zwar

$$x_2 = \frac{\pi}{2}.$$

b) (*1 Punkt*) Der Zähler $6x - 2$ ist genau die Ableitung des Nenners $3x^2 - 2x - 5$. Sei also $f(x) = 3x^2 - 2x - 5$. Dann gilt mit der Formel aus der Vorlesung (und $C = 0$ als Integrationskonstante)

$$\int \frac{6x-2}{3x^2-2x-5}\,dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| = \ln|3x^2 - 2x - 5|.$$

Falls man über Partialbruchzerlegung rechnet (und dabei $C = 0$ als Integrationskonstante wählt) erhält man äquivalent dazu

$$\begin{aligned}\int \frac{6x-2}{3x^2-2x-5}\,dx &= \int \frac{6x-2}{3(x-\frac{5}{3})(x+1)}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{A}{x-\frac{5}{3}} + \frac{B}{x+1}\,dx \\ &\overset{(*)}{=} \frac{1}{3}\int \frac{3}{x-\frac{5}{3}} + \frac{3}{x+1}\,dx = \ln|x-\tfrac{5}{3}| + \ln|x+1|,\end{aligned}$$

wobei $(*)$ durch Auflösen von $A + B = 6$ und $A - \frac{5}{3}B = -2$ folgt.

c) (*1 Punkt*) Es gilt $f'(x) = \dfrac{x^2+2x}{(1+x)^2} > 0$ genau dann wenn $x^2 + 2x > 0$. Dies ist erfüllt falls $x < -2$ oder $x > 0$. Das heisst, das gesuchte c ist

$$c = -2.$$

d) (*1 Punkt*) Da f für $x \neq \pi$ nach Definition stetig ist, bleibt als Bedingung, dass f auch in $x = \pi$ stetig sein muss. Das heisst, es muss gelten $\lim_{x\to\pi} f(x) = f(\pi)$. Mit der Regel von l'Hôpital folgt

$$\lim_{x\to\pi} f(x) = \lim_{x\to\pi} \frac{b\cos(x)}{-3x^2} = \frac{-b}{-3\pi^2} \stackrel{!}{=} \frac{1}{\pi^2} = f(\pi).$$

Daraus folgt

$$b = 3.$$

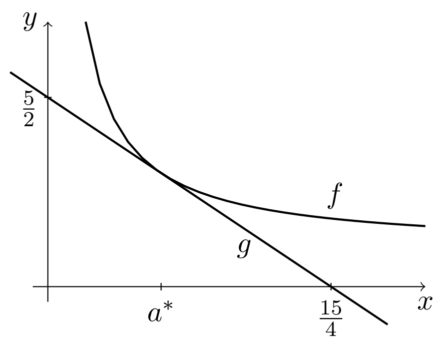
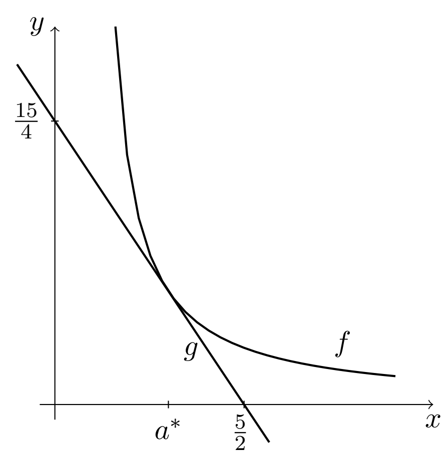
e) (*2 Punkte*) Die Entwicklung ist gegeben durch $a_{n+1} = f(a_n)$ mit Reproduktionsfunktion $f(x) = \dfrac{x+3}{2x}$. Die Fixpunkte sind die Lösungen von $f(x) = x$, umgeschrieben also von $2x^2 - x - 3 = 0$. Das heisst

$$a^\star = \frac{3}{2} > 0 \qquad \text{und} \qquad \widetilde{a} = -1 < 0.$$

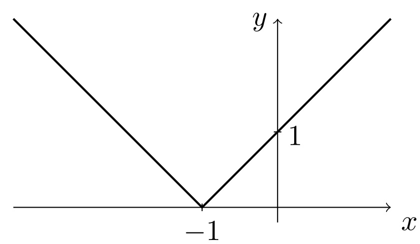
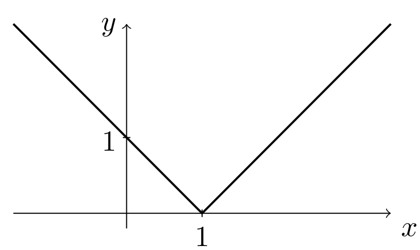
f) (*2 Punkte*) Ein Fixpunkt a einer Entwicklung mit Reproduktionsfunktion f ist attraktiv falls $|f'(a)| < 1$ und abstossend falls $|f'(a)| > 1$. In unserem Fall ist $f'(x) = -\dfrac{6}{4x^2}$ und somit gilt für die Fixpunkte aus Aufgabe **1e)**

$$|f'(a^*)| = |f'(3/2)| = 2/3 < 1 \qquad \text{und} \qquad |f'(\widetilde{a})| = |f'(-1)| = 3/2 > 1.$$

Insbesondere hat also die Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt a^* Steigung strikt zwischen -1 und 1. Die richtigen Antworten sind also

richtig	**falsch**	
⊗	○	Für jeden Startwert a_0 nahe a^* gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a^*$.
○	⊗	Für jeden Startwert a_0 nahe $\widetilde{a}$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \widetilde{a}$.
⊗	○	Die Gerade g zeigt die Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt a^*: 
○	⊗	Die Gerade g zeigt die Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt a^*: 

g) (*2 Punkte*) Die Funktion $f(x) = |1-x|$ hat in 1 den Wert $f(1) = 0$, was einen der beiden Graphen direkt ausschliesst. Weiter ist f in 1 nicht differenzierbar, da dort die Ableitung von links $(= -1)$ nicht mit der Ableitung von rechts $(= 1)$ übereinstimmt. Die anderen beiden Antworten sind richtig.

richtig	**falsch**	
$\bigcirc$	$\otimes$	Der Graph von f ist 
$\otimes$	$\bigcirc$	Der Graph von f ist 
$\bigcirc$	$\otimes$	Die Funktion f ist in 1 differenzierbar mit $f'(1) = 0$.
$\otimes$	$\bigcirc$	Die Funktion f ist in 0 differenzierbar mit $f'(0) = -1$.

h) (*1 Punkt*) Es gilt

$$\int_0^2 f(x)\,dx = 1,$$

wie man direkt aus dem Graphen von f ablesen kann (siehe Aufgabe **1g)**) oder auch durch Ausrechnen des Integrals (Integral aufteilen in 0 bis 1 und 1 bis 2).

2. (*14 Punkte*)

a) (*2 Punkte*) Durch Erweitern der Brüche erhält man

$$z = \frac{-i(1+i)}{-i \cdot i} + \frac{i(-i-1)}{(i-1)(-i-1)} - \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = 1 - i - \frac{i-1}{2} - \frac{1-i}{2} = 1 - i.$$

Weiter ist davon die Polardarstellung $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$. Die richtigen Antworten sind also

richtig	**falsch**	
○	⊗	$z = e^{-i\pi/2}$.
○	⊗	$z = -i$.
⊗	○	$z = 1 - i$.
⊗	○	$z = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$.

b) (*1 Punkt*) Die Gleichung $z^4 - 4i = 0$ besitzt vier Lösungen. Diese können wir durch aufeinanderfolgende Drehungen um $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ der angegebenen Lösung z_1 erhalten (entspricht Addition oder Subtraktion von $i\frac{\pi}{2}$ in der Polardarstellung). Die Lösung im 3. Quadranten finden wir durch zweimalige Subtraktion von $\frac{\pi}{2}$, also

$$z_3 = \sqrt{2}e^{i\pi/8 - 2\cdot i\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}e^{-i\pi 7/8}.$$

Alternativ: Die Lösung folgt auch durch Auflösen von $z^4 = r^4 e^{4i\varphi} = 4i \overset{!}{=} 4e^{i\pi/2 + 2\pi k}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ nach r und φ, sodass $-\pi < \varphi \leq -\pi/2$ gilt.

c) (*2+1+1 Punkte*)

i) Es gilt

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & a \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)((3-\lambda)(1-\lambda) - a)$$
$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3 - a) = 0.$$

Die Nullstellen von $\lambda^2 - 4\lambda + (3-a)$ sind $\lambda_{1/2} = 2 \pm \sqrt{1+a}$. Also ist

$$\lambda_1 = 2 + \sqrt{1+a} \qquad \lambda_2 = 2 - \sqrt{1+a} \qquad \lambda_3 = 1.$$

ii) Gesucht ist a, sodass $\det(A) = 0$. Entweder rechnet man $\det(A)$ aus (das Ergebnis ist $\det(A) = 3 - a$) oder man benutzt, dass die Determinante das Produkt der Eigenwerte ist. Aus Aufgabe **2c)** i) sieht man, dass A einen Eigenwert Null hat, falls

$$a = 3.$$

iii) Aus Aufgabe **2c)** i) sieht man, dass $a < -1$ gelten muss, damit man überhaupt komplexe Eigenwerte hat. Insbesondere ist dann $-a - 1 > 0$. Dann gilt $\lambda_{1/2} = 2 \pm \sqrt{1+a} = 2 \pm \sqrt{-(-a-1)} = 2 \pm i\sqrt{-a-1}$ mit Betrag $|\lambda_{1/2}| = \sqrt{2^2 + \sqrt{-a-1}^2} = \sqrt{3-a} \stackrel{!}{=} 3$. Somit muss gelten

$$a = -6.$$

d) (*3 Punkte*) Man rechnet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{II-2I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{III-I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{III-1/3II} \left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 4/3 & -4/3 \end{array}\right).$$

Daraus folgt

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

e) (*2+2 Punkte*)

i) Es ist

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Weiter muss für den Eigenvektor gelten

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b/2 + 1 \\ 1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \lambda \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt $\lambda = 1$ und anschliessend

$$b = 2.$$

Hinweis: Rechnet man mit der Matrix $\widetilde{A}$ erhält man auf die gleiche Weise

$$b = 2.$$

ii) Die Eigenwerte der Matrix A kann man aus Aufgabe **2e)** i) direkt ablesen (weil Dreiecksmatrix) und zwar sind es 1, $\frac{1}{2}$. Dazugehörige Eigenvektoren w_1 und w_2 sind linear unabhängig. Ein beliebiger Startvektor v_0 kann also als Linearkombination

$$v_0 = \alpha w_1 + \beta w_2$$

der Eigenvektoren geschrieben werden mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Damit die Folge $v_n = A^n v_0$ zum Nullvektor konvergiert, muss wegen Linearität $\alpha = 0$ sein, denn

$$v_n = A^n v_0 = A^n(\alpha w_1 + \beta w_2) = \alpha w_1 + \beta \frac{1}{2^n} w_2.$$

Also gilt $v_0 = \beta w_2$. Daraus folgt, dass v_0 ein Eigenvektor zum Eigenwert $\frac{1}{2}$ ist und somit

$$v_0 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } t \neq 0.$$

Hinweis: Rechnet man mit der Matrix $\widetilde{A}$ sind die Eigenwerte $1, -\frac{1}{2}$. Die gleiche Überlegung zeigt, dass v_0 ein Eigenvektor zum Eigenwert $-\frac{1}{2}$ sein muss. Also

$$v_0 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } t \neq 0.$$

3. (*10 Punkte*)

a) (*1 Punkt*) Das Richtungsfeld zeigt

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = 3.$$

b) (*2 Punkte*) Die zu den im Hinweis angegebenen Eigenvektoren zugehörige Eigenwerte sind 1 und 4. Daraus folgt direkt, dass die erste Antwortmöglichkeit korrekt ist. Antwort 3 ist falsch, da die angegebene Funktion nicht den angegebenen Anfangswert besitzt. Antwort 4 ist korrekt, folgt mit der Formel aus der Vorlesung oder direkt durch Umformen. Antwort 2 ist falsch. Die Lösung zum angegebenen Anfangswert $y(0)$ explodiert für $t \to \infty$. Die richtigen Antworten sind also

richtig	**falsch**	
⊗	○	Die allgemeine Lösung dieses Differentialgleichungssystems ist $$y(t) = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} e^{4t}$$ mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
○	⊗	Die Lösung $y(t)$ des DGL-Systems zum Anfangswert $y(0) = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ stabilisiert sich für $t \to \infty$ in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
○	⊗	Die Lösung des DGL-Systems zum Anfangswert $y(0) = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch $y(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \end{pmatrix} e^{4t}$.
⊗	○	Die erste Komponente y_1 einer Lösung y des DGL-Systems erfüllt die Differentialgleichung 2. Ordnung $$y_1''(x) - 5y_1'(x) + 4y_1(x) = 0.$$

c) (*2 Punkte*) Dieses System kann mit der Methode der Variation der Konstanten gelöst werden.

Die homogene Gleichung ist $y'(x) = y(x)$ mit Lösung $y(x) = Ke^x$. Der Ansatz für die inhomogene Gleichung ist also $y(x) = K(x)e^x$. Einsetzen des Ansatzes in die Differentialgleichung liefert

$$K'(x) \stackrel{!}{=} xe^{-x}.$$

Daraus folgt mit dem Hinweis (oder sonst mit partieller Integration)

$$K(x) = \int xe^{-x}\,dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C$$

und somit

$$y(x) = K(x)e^x = Ce^x - x - 1 \qquad \text{mit } C \in \mathbb{R} \text{ Konstante.}$$

d) (*5 Punkte*) Dieses System kann mit der Methode der Trennung der Variablen gelöst werden.

Schreibt man $y'(x) = \frac{dy}{dx}$ und sortiert die y-Terme auf die linke Seite und die x-Terme auf die rechte Seite, erhält man aus der DGL die Gleichung

$$\frac{1}{y^2-1}\,dy = x\,dx.$$

(Die stationären Lösungen $y(x) \equiv 1$ und $y(x) \equiv -1$ müssen nicht beachtet werden, da die gesuchte Lösung die Bedingung $y(0) = 0$ erfüllen muss.)

Auf beiden Seiten bildet man nun die Stammfunktion und rechnet aus

$$\int \frac{1}{y^2-1}\,dy = \int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C \qquad \text{mit } C \in R \text{ Konstante.}$$

Die Stammfunktion auf der linken Seite kann mit dem Hinweis (oder sonst mit Partialbruchzerlegung) berechnet werden

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{y^2-1}\,dy &= \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{y-1}\,dy - \int \frac{1}{y+1}\,dy\right)\\ &= \frac{1}{2}(\ln|y-1| - \ln|y+1|) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|.\end{aligned}$$

Die somit erhaltene Gleichung

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = \frac{1}{2}x^2 + C$$

löst man nach y auf und erhält

$$\frac{y-1}{y+1} = \widetilde{C} e^{x^2} \qquad \text{mit } \widetilde{C} \neq 0 \text{ Konstante}$$

und daraus

$$y = y(x) = \frac{1 + \widetilde{C} e^{x^2}}{1 - \widetilde{C} e^{x^2}}.$$

Zuletzt wird die Anfangsbedingung $y(0) = 0$ eigesetzt, welche $\widetilde{C} = -1$ liefert. Die gesuchte Lösung ist also

$$y(x) = \frac{1 - e^{x^2}}{1 + e^{x^2}}.$$

4. (*10 Punkte*)

a) (*2 Punkte*) Ausrechnen der partiellen Ableitungen zeigt, dass Antwort 2 korrekt ist. Die Gleichung für die Tangentialebene in einem Punkt (x_0, y_0, z_0) ist

$$l(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

Setzt man den angegebenen Punkt von Antwort 3 ein (die partiellen Ableitungen hat man bsp. aus Antwort 2) folgt direkt, dass Antwort 3 korrekt ist.

Die anderen beiden Antworten sind falsch. Der Punkt in Antwort 4 ist kein Sattelpunkt sondern ein lokales Maximum. Der Punkt $(0,0)$ liegt auf der Niveaulinie zur Höhe 1 da $f(0,0) = 1$. Die richtigen Antworten sind also

richtig	**falsch**	
○	⊗	Der Punkt $(0,0)$ liegt auf der Niveaulinie von f zur Höhe 3.
⊗	○	Der Gradient von f ist $$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y \\ -2y - 3x \end{pmatrix}.$$
⊗	○	Die Gleichung der Tangentialebene an die Funktion f im Punkt $(1,1,-2)$ ist gegeben durch $l(x,y) = z = 3 - 5y$.
○	⊗	Die Funktion f hat bei $\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$ einen Sattelpunkt.

b) (*2 Punkte*) Das Gleichungssystem, welches zu lösen ist, lautet

$$\begin{cases} f(x,y) = x^3 - y^2 - 3xy + 1 = 0 \\ y = x + 1 \end{cases}.$$

Setzt man die zweite Gleichung in die erste ein und multipliziert aus, erhält man

$$x^3 - 4x^2 - 5x = x(x^2 - 4x - 5) = 0$$

mit Lösungen $x = 0$, $x = 5$ und $x = -1$. Der gesuchte Schnittpunkt hat also den x-Wert -1. Einsetzen in die zweite Gleichung liefert $y = 0$. Der Schnittpunkt ist somit

$$(-1, 0).$$

c) (*2 Punkte*) Mit impliziter Differentiation folgt für die Steigung in $(-1, 0)$

$$y'(-1) = -\frac{f_x(-1,0)}{f_y(-1,0)} = -\frac{3}{3} = -1.$$

Hinweis: Rechnet man die Steigung im Punkt $(0, -1)$ aus, erhält man

$$y'(0) = -\frac{f_x(0,-1)}{f_y(0,-1)} = -\frac{3}{2}.$$

d) (*1 Punkt*) Die Divergenz von K ist

$$\operatorname{div}(K) = \operatorname{div}(K)(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}K_1(x,y) + \frac{\partial}{\partial y}K_2(x,y) = 2x - 2x + 1 = 1.$$

e) (*3 Punkte*) Das Gebiet B ist $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 2\,,\, x^2 \leq y \leq 4\}$ und somit das Gebietsintegral mit Aufgabe **4d)**

$$\begin{aligned}\int_B \operatorname{div}(K)\,dA &= \text{Fläche von } B \\ &= \int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4} dydx = \int_{-2}^{2} 4 - x^2\,dx = 4x - \frac{1}{3}x^3\Big|_{-2}^{2} = \frac{32}{3}.\end{aligned}$$

Hinweis: Wenn man mit $\operatorname{div}(K) = x + 1$ rechnet, erhält man

$$\begin{aligned}\int_B \operatorname{div}(K)\,dA &= \int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4} x+1\,dydx = \int_{-2}^{2}(x+1)(4-x^2)\,dx = \int_{-2}^{2} 4x - x^3 + 4 - x^2\,dx \\ &= 2x^2 - \frac{1}{4}x^4 + 4x - \frac{1}{3}x^3\Big|_{-2}^{2} = \frac{32}{3}.\end{aligned}$$

5. (*14 Punkte*)

a) (*2 Punkte*) Für Vektorfelder $K = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$, die auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert sind, ist konservativ äquivalent zu der Bedingung $Q_x = P_y$. Für die angegebenen Vektorfelder gilt in der gleichen Reihenfolge wie in der Aufgabe

$$Q_x(x,y) = 1 - y^2(e^{x^2} + 2x^2e^{x^2}) \neq e^{x^2} - 2y = P_y(x,y)$$

$$Q_x(x,y) = 2ye^{y^2} + 2xy = 2ye^{y^2} + 2xy = P_y(x,y)$$

$$Q_x(x,y) = 2x\cos(2y) = 2x\cos(2y) = P_y(x,y)$$

$$Q_x(x,y) = 3x^2y + 2x\cos(x^2) \neq 2x\sin(x^2) + 3x^2 = P_y(x,y)$$

Die richtigen Antworten sind also

richtig	**falsch**	
○	⊗	Das Vektorfeld K mit $K(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x^2}y - y^2 \\ x - xe^{x^2}y^2 \end{pmatrix}$ ist konservativ.
⊗	○	Das Vektorfeld K mit $K(x,y) = \begin{pmatrix} e^{y^2} + xy^2 \\ 2xye^{y^2} + x^2y \end{pmatrix}$ ist konservativ.
⊗	○	Das Vektorfeld K mit $K(x,y) = \begin{pmatrix} x\sin(2y) - x \\ x^2\cos(2y) + \sin^2(y^3) \end{pmatrix}$ ist konservativ.
○	⊗	Das Vektorfeld K mit $K(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy\sin(x^2) + 3x^2y \\ x^3y + \sin(x^2) \end{pmatrix}$ ist konservativ.

b) (*2 Punkte*) Antwort 3 ist korrekt, da das angegebene Gebietsintegral nichts anderes als die Fläche von B ist und diese ist direkt aus der Abbildung gelesen gleich 9/2. Demzufolge muss Antwort 4 falsch sein.

Die ersten beiden Antworten können ohne Ausrechnen der Integrale entschieden werden. Das Vektorfeld K ist konservativ (da $Q_x(x, y) = 2 = P_y(x, y)$) und somit ist jedes Kurvenintegral entlang einer geschlossenen Kurve gleich null (folgt auch aus der Formel von Green). Antwort 1 ist also korrekt. Der Fluss durch die geschlossene Kurve γ ist nach dem Satz von Gauss gleich dem Integral der Divergenz über dem eingeschlossenen Gebiet

$$\oint_\gamma K \cdot n\, ds = \iint_B \operatorname{div}(K)\, dA.$$

Die Divergenz von K ist 2 und somit der Fluss gleich $2 \cdot$ Fläche von $B \neq 0$.

Die richtigen Antworten sind also

richtig	**falsch**	
⊗	○	Das Arbeitsintegral vom K entlang γ ist $$\oint_\gamma K \cdot d\gamma = 0.$$
○	⊗	Der Fluss von K durch γ von innen nach aussen ist $$\oint_\gamma K \cdot n\, ds = 0.$$
⊗	○	Das Gebietsintegral der konstanten Funktion 1 über B ist $$\iint_B 1\, dA = \frac{9}{2}.$$
○	⊗	Der Flächeninhalt von B ist 4.

c) (*2 Punkte*) Es soll gelten

$$K(x,y) = \begin{pmatrix} x+y \\ -y^2+x \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 2ax+2ay \\ 2ax-y^2 \end{pmatrix} = \nabla f.$$

Daraus folgt direkt

$$a = \frac{1}{2}.$$

d) (*2 Punkte*) In Aufgabe **5c)** wird gezeigt, dass K ein Gradientenfeld ist, also insbesondere konservativ. Für das Kurvenintegral eines konservativen Vektorfeldes $K = \nabla f$ entlang einer Kurve γ gilt

$$\int_\gamma K \cdot d\gamma = f(\text{Endpunkt von } \gamma) - f(\text{Anfangspunkt von } \gamma).$$

In diesem Fall ist also mit f aus Aufgabe **5c)** (mit $a = \frac{1}{2}$)

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2} K \cdot d\gamma = f(1,3) - f(0,0) = -\frac{11}{2}.$$

Alternativ: Das Kurvenintegral kann auch direkt ausgerechnet werden. Dabei parametrisiert man beispielsweise

$$\gamma_1 : t \mapsto \gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{t} \end{pmatrix} \qquad \text{für} \qquad 0 \le t \le 1$$

$$\gamma_2 : t \mapsto \gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \qquad \text{für} \qquad 1 \le t \le 3$$

und erhält

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1+\gamma_2} K \cdot d\gamma &= \int_{\gamma_1} K \cdot d\gamma + \int_{\gamma_2} K \cdot d\gamma \\ &= \int_0^1 K(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t)\, dt + \int_1^3 K(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t)\, dt \\ &= \int_0^1 t + \sqrt{t}\, dt + \int_1^3 -t^2 + 1\, dt \\ &= \left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{2}{3}t^{3/2}\right)\Bigg|_0^1 + \left(-\frac{1}{3}t^3 + t\right)\Bigg|_1^3 = -\frac{11}{2}. \end{aligned}$$

e) (*3 Punkte*) Mögliche Parametrisierungen sind

$$\gamma_1 : t \mapsto \gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{für} \qquad 0 \le t \le 2$$
$$\gamma_2 : t \mapsto \gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix} \qquad \text{für} \qquad 0 \le t \le 2$$
$$\gamma_3 : t \mapsto \gamma_3(t) = \begin{pmatrix} 2-t \\ 2-t \end{pmatrix} \qquad \text{für} \qquad 0 \le t \le 2.$$

f) (*3 Punkte*) Nach dem Satz von Gauss ist

$$\oint_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} K \cdot n \, ds = \iint_B \operatorname{div}(K) \, dA.$$

In diesem Fall ist $\operatorname{div}(K) = 2$ und somit

$$\oint_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} K \cdot n \, ds = \iint_B 2 \, dA = 2 \cdot \text{Fläche von } B = 2 \cdot 2 = 4.$$

Alternativ: Der Fluss kann auch direkt ausgerechnet werden. Dabei braucht man beispielsweise die Parametrisierungen von Aufgabe **5e)** und rechnet

$$\oint_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} K \cdot n \, ds = \int_{\gamma_1} K \cdot n \, ds + \int_{\gamma_2} K \cdot n \, ds + \int_{\gamma_3} K \cdot n \, ds$$

mit

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} K \cdot n \, ds &= \int_0^2 K(\gamma_1(t)) \cdot n(\gamma_1(t)) \, dt \\
&= \int_0^2 \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} dt = \int_0^2 -t \, dt = -2 \\
\int_{\gamma_2} K \cdot n \, ds &= \int_0^2 K(\gamma_2(t)) \cdot n(\gamma_2(t)) \, dt \\
&= \int_0^2 \begin{pmatrix} 4+4t \\ -t^2+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^2 4 + 4t \, dt = 16 \\
\int_{\gamma_3} K \cdot n \, ds &= \int_0^2 K(\gamma_3(t)) \cdot n(\gamma_3(t)) \, dt \\
&= \int_0^2 \begin{pmatrix} 2t^2 - 10t + 12 \\ -t^2 + 3t - 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^2 -3t^2 + 13t - 14 \, dt = -10.
\end{aligned}$$

Insgesamt also

$$\oint_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} K \cdot n \, ds = -2 + 16 - 10 = 4.$$