Dr. A. Caspar **ETH Zürich, August 2016**

D-BIOL, D-CHAB, D-HEST

Prüfung zur Vorlesung Mathematik I/II

Bitte ausfüllen!

Name:	
Vorname:	
Legi-Nr.:	

Nicht ausfüllen!

Aufgabe	Punkte		Kontrolle	
	MC	Total	MC	Total
1				
2				
3				
4				
5				
Total				

Vollständigkeit	

Bitte wenden!

Wichtige Hinweise zur Prüfung

Prüfungsdauer: 3 Stunden.

Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten (nicht Blätter!) mit persönlichen, von Hand geschriebenen Notizen. Keine (Taschen)Rechner. 1 Wörterbuch für fremdsprachige Studierende.

Bitte beachten Sie folgende Punkte:

- Tragen Sie **jetzt** Ihren Namen in das Deckblatt ein und geben Sie es **am Ende** der Prüfung als vorderstes Blatt Ihrer Arbeit ab.
- Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch.
- Beginnen Sie jede Aufgabe **auf einem neuen Blatt**.
- Begründen Sie Ihre Lösungen, soweit nicht anders angegeben. Dabei können Sie bekannte Formeln aus der Vorlesung und den Übungen ohne Herleitung verwenden.
- Schreiben Sie **nicht** mit Bleistift und **nicht** mit roter oder grüner Farbe.
- Die Reihenfolge der Bearbeitung der Aufgaben ist Ihnen freigestellt. Ordnen Sie jedoch am Ende der Prüfung die Aufgaben für die Abgabe.
- Wir erwarten nicht, dass Sie alle Aufgaben lösen. Versuchen Sie einfach Ihr Bestes!
  Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet.
- Bei einer **Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe)** sind jeweils 4 Aussagen/Antworten angegeben, davon sind jeweils genau 2 korrekt.

  Eine MC-Aufgabe ist genau dann korrekt gelöst, wenn Sie die 2 korrekten Antworten mit „richtig“ **und** die 2 inkorrekten mit „falsch“ kennzeichnen. Sie müssen also bei jeder MC-Aufgabe genau 4 Kreuze setzen und jedes muss jeweils an der richtigen Stelle sein.

  Zum Beispiel ist folgende MC-Aufgabe nur mit diesen 4 Kreuzen korrekt gelöst.

richtig	**falsch**	
$\otimes$	$\bigcirc$	Hier steht eine korrekte Aussage/Antwort.
$\otimes$	$\bigcirc$	Hier steht eine korrekte Aussage/Antwort.
$\bigcirc$	$\otimes$	Hier steht eine inkorrekte Aussage/Antwort.
$\bigcirc$	$\otimes$	Hier steht eine inkorrekte Aussage/Antwort.

  Bei den MC-Aufgaben werden nur die Antworten auf den **Aufgabenblättern** bewertet. Die Antworten in den MC-Aufgaben müssen nicht begründet werden.

Viel Erfolg!

Aufgaben

---

1. (*12 Punkte*)

Die Antworten in dieser Aufgabe müssen Sie **nicht** begründen. Schreiben Sie die Antworten **vollständig gekürzt und vereinfacht** direkt auf das Aufgabenblatt. Antworten auf anderen Blättern werden nicht bewertet.

a) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = \sin(x) - x\cos(x)$:

$$f'(x) = \underline{\hspace{6cm}}.$$

Die Ableitung f' hat im Intervall $[0, 2\pi]$ zwei Fixpunkte x_1 und x_2 mit

$$x_1 = 0 \qquad \text{und} \qquad x_2 = \underline{\hspace{3cm}}.$$

b) Berechnen Sie

$$\int \frac{6x-2}{3x^2-2x-5}\,dx = \underline{\hspace{9cm}}.$$

Dabei können Sie die Integrationskonstante $C = 0$ wählen.

Hinweis: Das geht auch ohne Partialbruchzerlegung.

c) Bestimmen Sie das **grösste** $c < 0$, sodass die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{x^2}{1+x}$ für alle $x < c$ streng monoton wachsend ist.

$$c = \underline{\hspace{3cm}}$$

d) Sei $b \in \mathbb{R}$ und sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{b\sin(x)}{\pi^3 - x^3} & \text{für } x \neq \pi \\[2ex] \dfrac{1}{\pi^2} & \text{für } x = \pi. \end{cases}$$

Wie muss b gewählt werden, damit f eine stetige Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ ist?

$$b = \underline{\hspace{3cm}}$$

e) Die Entwicklung $a_{n+1} = \dfrac{a_n + 3}{2a_n}$ besitzt zwei Fixpunkte $a^\star$ und $\widetilde{a}$.

Rechnen Sie die Fixpunkte aus.

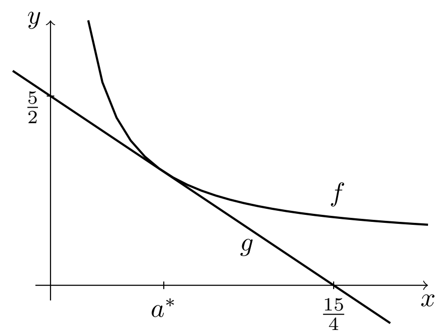
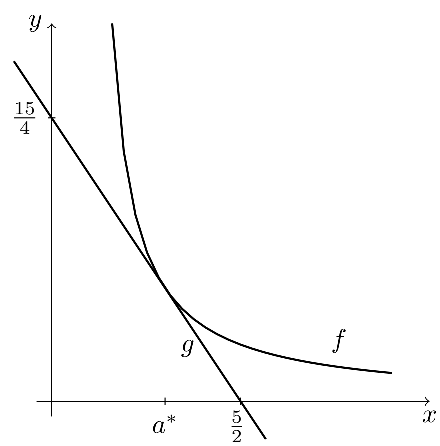
Achten Sie beim Eintragen der Fixpunkte auf dem Aufgabenblatt auf das angegebene Vorzeichen (einer der Fixpunkte ist positiv, der andere ist negativ).

$$a^\star = \underline{\qquad\qquad\qquad} > \mathbf{0} \qquad \text{und} \qquad \widetilde{a} = \underline{\qquad\qquad\qquad} < \mathbf{0}.$$

f) **MC-Aufgabe** Kreuzen Sie Ihre Antworten direkt **auf dem Aufgabenblatt** an.

Sei $a_{n+1} = \dfrac{a_n + 3}{2a_n}$ die Entwicklung mit den Fixpunkten $a^\star$ und $\widetilde{a}$ aus Aufgabe **1e)** und sei f die Reproduktionsfunktion der Entwicklung.

Welche der folgenden Aussagen sind **richtig** ?

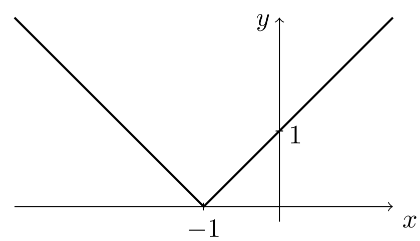
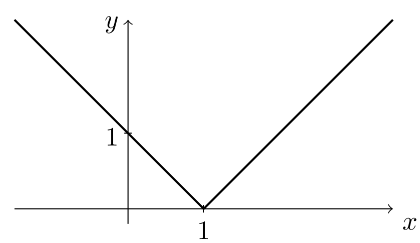
richtig	**falsch**	
◯	◯	Für jeden Startwert a_0 nahe a^* gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a^*$.
◯	◯	Für jeden Startwert a_0 nahe $\widetilde{a}$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \widetilde{a}$.
◯	◯	Die Gerade g zeigt die Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt a^*: 
◯	◯	Die Gerade g zeigt die Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt a^*: 

Siehe nächstes Blatt!

g) MC-Aufgabe Kreuzen Sie Ihre Antworten direkt **auf dem Aufgabenblatt** an.

Wir betrachten die Funktion f mit $f(x) = |1 - x|$.

Welche der folgenden Aussagen sind **richtig** ?

richtig	**falsch**	
○	○	Der Graph von f ist 
○	○	Der Graph von f ist 
○	○	Die Funktion f ist in 1 differenzierbar mit $f'(1) = 0$.
○	○	Die Funktion f ist in 0 differenzierbar mit $f'(0) = -1$.

h) Sei f wie in der obigen Aufgabe **1g)** die Funktion mit $f(x) = |1 - x|$.

Berechnen Sie

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ .$$

Bitte wenden!

2. (*14 Punkte*)

In den Aufgabe **2a)** und **2b)** bezeichnet i die imaginäre Einheit. Es gilt also $i^2 = -1$.

a) **MC-Aufgabe** Kreuzen Sie Ihre Antworten direkt **auf dem Aufgabenblatt** an.

Das Resultat der Rechnung

$$\frac{1+i}{i} + \frac{i}{i-1} - \frac{1}{1+i} = z$$

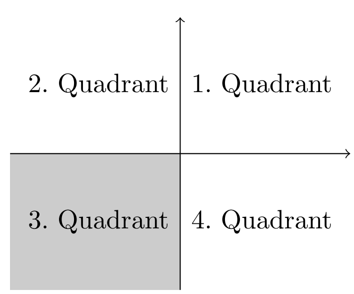
ist

richtig	**falsch**	
○	○	$z = e^{-i\frac{\pi}{2}}$.
○	○	$z = -i$.
○	○	$z = 1 - i$.
○	○	$z = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

> Bei den Aufgaben **2b) und 2c)** müssen Sie Ihre Antworten **nicht** begründen.
>
> Schreiben Sie die Antworten **vollständig gekürzt und vereinfacht** direkt auf das Aufgabenblatt. Antworten auf anderen Blättern werden nicht bewertet.

b) Die Gleichung $z^4 - 4i = 0$ besitzt im ersten Quadranten die Lösung $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{8}}$.

Geben Sie die Polardarstellung $z_3 = re^{i\varphi}$ (mit $r > 0$ und $-\pi < \varphi \leq \pi$) der Lösung z_3 im **dritten Quadranten** an (siehe Abbildung).



Schreiben Sie Ihre Antwort **direkt auf das Aufgabenblatt**.

$$z_3 = \underline{\hspace{4cm}}.$$

c) Sei $a \in \mathbb{R}$ und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

i) Geben Sie die Eigenwerte von A **direkt auf dem Aufgabenblatt** an.

$\lambda_1 = 2 + \sqrt{1+a}$ $\qquad$ $\lambda_2 =$ ______________ $\qquad$ $\lambda_3 =$ ______________

ii) Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass das homogene lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ eine nicht-triviale Lösung $x \neq 0$ besitzt. Geben Sie a **direkt auf dem Aufgabenblatt** an.

$a =$ ______________

iii) Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass A zwei komplexe Eigenwerte mit Betrag 3 hat. Geben Sie a **direkt auf dem Aufgabenblatt** an.

$a =$ ______________

d) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

mit dem Gauss-Verfahren.

e) Gegeben sei das Entwicklungsmodell $\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + y_n \\ y_{n+1} = y_n \end{cases}$.

i) Sei $v_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Geben Sie die Matrix A an, mit der das Entwicklungsmodell in Matrixschreibweise geschrieben werden kann, d.h. in der Form $v_{n+1} = Av_n$.

Bestimmen Sie zusätzlich $b \in \mathbb{R}$ so, dass der Vektor $\begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A ist.

Hinweis: Falls Sie die Matrix A nicht gefunden haben, bestimmen Sie b so, dass $\begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor der Matrix $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} -1/2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist.

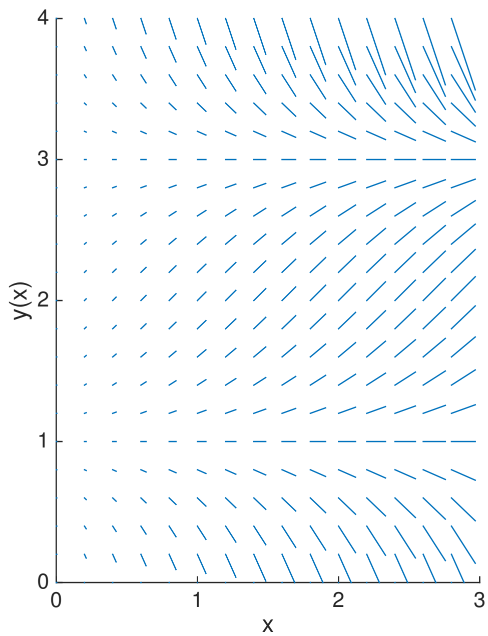
ii) Geben Sie einen Startvektor $v_0 \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ an, sodass die Folge der Vektoren $v_0, v_1, v_2, \ldots$ zum Nullvektor $v_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ konvergiert.

Hinweis: Falls Sie Teilaufgabe i) nicht gelöst haben, nehmen Sie wieder die Matrix $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} -1/2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und die Entwicklung $v_{n+1} = \widetilde{A}v_n$.

Bitte wenden!

3. (*10 Punkte*)

a) Das Richtungsfeld einer Differentialgleichung $y'(x) = F(x, y(x))$ sei:



Die Lösung $x \mapsto y(x)$ der Differentialgleichung zum Anfangswert $y(0) = 1.8$ konvergiert für $x \to \infty$. Geben Sie die Antwort **direkt auf dem Aufgabenblatt** an.

$$\lim_{x \to \infty} y(x) = \underline{\hspace{4cm}}$$

Sie müssen Ihre Antwort **nicht** begründen. Schreiben Sie diese **vollständig gekürzt und vereinfacht** direkt auf das Aufgabenblatt. Antworten auf anderen Blättern werden nicht bewertet.

b) **MC-Aufgabe** Kreuzen Sie Ihre Antworten direkt **auf dem Aufgabenblatt** an.

Wir betrachten das lineare Differentialgleichungssystem (DGL-System)

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} y(t)$$

mit $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ und $y'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix}$.

Hinweis: Die Vektoren $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ sind Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Welche der folgenden Aussagen sind **richtig** ?

richtig	falsch	
○	○	Die allgemeine Lösung dieses Differentialgleichungssystems ist $$y(t) = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} e^{4t}$$ mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
○	○	Die Lösung $y(t)$ des DGL-Systems zum Anfangswert $y(0) = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ stabilisiert sich für $t \to \infty$ in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
○	○	Die Lösung des DGL-Systems zum Anfangswert $y(0) = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch $y(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \end{pmatrix} e^{4t}$.
○	○	Die erste Komponente y_1 einer Lösung y des DGL-Systems erfüllt die Differentialgleichung 2. Ordnung $$y_1''(x) - 5y_1'(x) + 4y_1(x) = 0.$$

c) Finden Sie die allgemeine Lösung von $y'(x) = y(x) + x$.

Hinweis: Es gilt $\int xe^{-x}\,dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C$.

d) Lösen Sie das Anfangswertproblem $y'(x) = x\,(y(x)^2 - 1)$ mit $y(0) = 0$.

Hinweis: Es gilt $\dfrac{1}{y^2-1} = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{y-1} - \dfrac{1}{y+1}\Big)$.

4. (*10 Punkte*)

a) **MC-Aufgabe** Kreuzen Sie Ihre Antworten direkt **auf dem Aufgabenblatt** an.

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = x^3 - y^2 - 3xy + 1.$$

Welche der folgenden Aussagen sind **richtig** ?

richtig	**falsch**	
○	○	Der Punkt $(0, 0)$ liegt auf der Niveaulinie von f zur Höhe 3.
○	○	Der Gradient von f ist $$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y \\ -3x - 2y \end{pmatrix}.$$
○	○	Die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen der Funktion f im Punkt $(1, 1, -2)$ ist gegeben durch $l(x, y) = z = 3 - 5y$.
○	○	Die Funktion f hat bei $\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$ einen Sattelpunkt.

b) Wir betrachten die Niveaulinie der Funktion f aus Aufgabe **4a)** zur Höhe 0, also die Kurve in $\mathbb{R}^2$, die gegeben ist durch $f(x, y) = 0$.

Diese Kurve hat drei Schnittpunkte mit der Geraden $y = x + 1$.

Bestimmen Sie den Schnittpunkt mit **negativem** (< 0) x-Wert.

c) Wir betrachten wieder die Kurve in $\mathbb{R}^2$, die gegeben ist durch $f(x, y) = 0$ mit der Funktion f aus Aufgabe **4a)**.

Rechnen Sie die Steigung dieser Kurve im Schnittpunkt aus Aufgabe **4b)** aus.

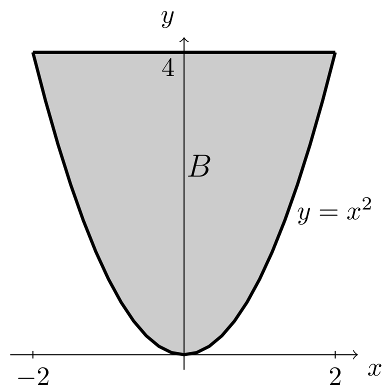
Hinweis: Falls Sie den Schnittpunkte nicht berechnen konnten, rechnen Sie die Steigung der Kurve im Punkt $(0, -1)$ aus.

d) Gegeben Sei das Vektorfeld K mit $K(x,y) = \begin{pmatrix} e^y + x^2 \\ \sin(x) - 2xy + y \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie $\operatorname{div}(K)$.

e) Sei K das Vektorfeld aus Aufgabe **4d)**.

Sei $B \in \mathbb{R}^2$ das Gebiet, welches durch die Gerade $y = 4$ und die Parabel $y = x^2$ begrenzt wird (siehe Abbildung).



Berechnen Sie das Integral

$$\iint_B \operatorname{div}(K)\, dA.$$

Hinweis: Falls Sie Aufgabe **4d)** nicht gelöst haben, nehmen Sie an, dass

$$\operatorname{div}(K) = \operatorname{div}(K)(x,y) = x + 1.$$

Bitte wenden!

5. (*14 Punkte*)

a) **MC-Aufgabe** Kreuzen Sie Ihre Antworten direkt **auf dem Aufgabenblatt** an.

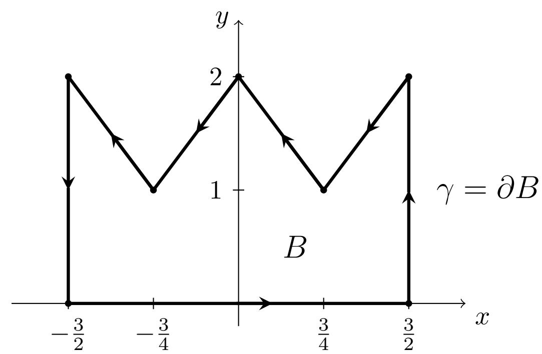
Welche der folgenden Aussagen sind **richtig** ?

richtig	**falsch**	
◯	◯	Das Vektorfeld K mit $K(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x^2}y - y^2 \\ x - xe^{x^2}y^2 \end{pmatrix}$ ist konservativ.
◯	◯	Das Vektorfeld K mit $K(x,y) = \begin{pmatrix} e^{y^2} + xy^2 \\ 2xye^{y^2} + x^2y \end{pmatrix}$ ist konservativ.
◯	◯	Das Vektorfeld K mit $K(x,y) = \begin{pmatrix} x\sin(2y) - x \\ x^2\cos(2y) + \sin^2(y^3) \end{pmatrix}$ ist konservativ.
◯	◯	Das Vektorfeld K mit $K(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy\sin(x^2) + 3x^2y \\ x^3y + \sin(x^2) \end{pmatrix}$ ist konservativ.

b) **MC-Aufgabe** Kreuzen Sie Ihre Antworten direkt **auf dem Aufgabenblatt** an.

Sei $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld $K(x, y) = \begin{pmatrix} 5x + 2y \\ 2x - 3y \end{pmatrix}$.

Weiter sei folgende positiv orientierte Kurve γ gegeben, welche das Gebiet B in der (x, y)-Ebene umrandet (die Pfeile kennzeichnen die Durchlaufrichtung):



Welche der folgenden Aussagen sind **richtig** ?

richtig	**falsch**	
○	○	Das Arbeitsintegral vom K entlang γ ist $$\oint_\gamma K \cdot d\gamma = 0.$$
○	○	Der Fluss von K durch γ von innen nach aussen ist $$\oint_\gamma K \cdot n\, ds = 0.$$
○	○	Das Gebietsintegral der konstanten Funktion 1 über B ist $$\iint_B 1\, dA = \frac{9}{2}.$$
○	○	Der Flächeninhalt von B ist 4.

c) Gegeben seien das Vektorfeld K und die Funktion f mit

$$K(x, y) = \begin{pmatrix} x + y \\ -y^2 + x \end{pmatrix}$$

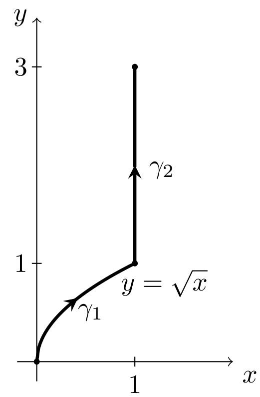
$$f(x, y) = ax(x + 2y) - \frac{1}{3}y^3 \qquad \text{mit einer Konstanten } a \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie a so, dass K das Gradientenfeld von f ist, das heisst $K = \nabla f$.

Bitte wenden!

d) Sei K das Vektorfeld aus Aufgabe **5c)**.

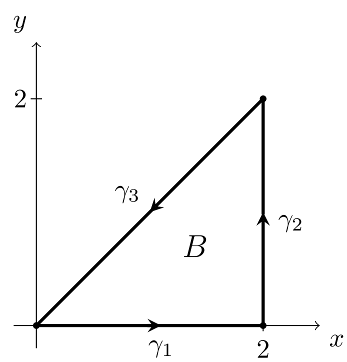
Sei $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ die Kurve in der (x, y)-Ebene, die zusammengesetzt ist aus $y = \sqrt{x}$ von $(0, 0)$ bis $(1, 1)$ und aus der geradlinigen Verbindung von $(1, 1)$ bis $(1, 3)$ (siehe Abbildung, die Pfeile kennzeichnen die Durchlaufrichtung).



Berechnen Sie das Kurvenintegral von K entlang der Kurve $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, also $\displaystyle\int_\gamma K \cdot d\gamma$.

Hinweis: Das geht auch ohne Parametrisierungen.

e) Gegeben seien die drei Kurven γ_1, γ_2 und γ_3, die den Rand des Dreiecks B mit Eckpunkten $(0, 0)$, $(2, 0)$ und $(2, 2)$ bilden (siehe Abbildung, die Pfeile kennzeichnen die Durchlaufrichtung).



Geben Sie für γ_1, γ_2 und γ_3 jeweils eine mögliche Parametrisierung an. Achten Sie dabei auf die Durchlaufrichtung. Schreiben Sie Ihre Antwort **direkt auf das Aufgabenblatt**.

$$\gamma_1 : t \mapsto \gamma_1(t) = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad \mathbf{0 \leq t \leq 2}$$

$$\gamma_2 : t \mapsto \gamma_2(t) = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad \mathbf{0 \leq t \leq 2}$$

$$\gamma_3 : t \mapsto \gamma_3(t) = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad \mathbf{0 \leq t \leq 2}$$

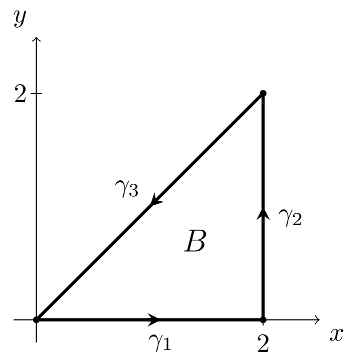
Sie müssen Ihre Antworten **nicht** begründen. Schreiben Sie die Antworten **vollständig gekürzt und vereinfacht** direkt auf das Aufgabenblatt. Antworten auf anderen Blättern werden nicht bewertet.

Siehe nächstes Blatt!

f) Sei K das Vektorfeld mit

$$K(x,y) = \begin{pmatrix} 2x + 2xy \\ -y^2 + x \end{pmatrix}.$$

Sei $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ die Kurve in der (x,y)-Ebene, die zusammengesetzt ist aus den Kurven γ_1, γ_2 und γ_3 aus Aufgabe **5e)**, welche das Dreieck B mit Eckpunkten $(0,0)$, $(2,0)$ und $(2,2)$ begrenzen (siehe Abbildung).



Berechnen Sie das Flussintegral von K durch die Kurve $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ von innen nach aussen, also

$$\oint_\gamma K \cdot n \, ds.$$

Hinweis: Das geht auch ohne Berechnung des Vektors n.