Prof. W. Farkas **ETH Zürich, August 2017**

D-BIOL, D-CHAB, D-HEST

Prüfung zur Vorlesung Mathematik I/II

---

1. (*12 Punkte*)

a) (*1 Punkt*) Der Grenzwert ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{18n^5 + 2n^2 - 7}{3n^5 - 2n^4 + 6n} = \lim_{n\to\infty} \frac{18 + \frac{2}{n^3} - \frac{7}{n^5}}{3 - \frac{2}{n} + \frac{6}{n^4}} = \frac{18}{3} = 6.$$

b) (*1 Punkt*) Die Ableitung ist mit Produktregel und Kettenregel

$$f'(x) = 2\Big(\frac{1}{2\sqrt{x}} \sin(x^{\frac{3}{2}}) + \sqrt{x}\cos(x^{\frac{3}{2}})\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\Big) = \frac{\sin(x^{\frac{3}{2}})}{\sqrt{x}} + 3x\cos(x^{\frac{3}{2}}).$$

c) (*1 Punkt*) Die Ableitung f' von f ist mit Quotientenregel $f'(x) = \frac{e^{2x} - 2(1+x)e^{2x}}{e^{4x}}$, gekürzt also $f'(x) = \frac{-1-2x}{e^{2x}}$. Es gilt somit $f'(x) > 0$ (also streng monoton wachsend) genau dann, wenn $-1-2x > 0$, und $f'(x) < 0$ (also streng monoton fallend) genau dann, wenn $-1-2x < 0$. Das heisst, dass f für $x > -\frac{1}{2}$ streng monoton wachsend ist und für $x < -\frac{1}{2}$ streng monoton fallend. Das gesuchte c ist also

$$c = -\frac{1}{2}.$$

d) (*3 Punkte*) **Zum ersten Teil:** Damit f an der Stelle $x = 0$ stetig ist, muss

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$$

gelten. In diesem Fall ist

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \cos(x) = \cos(0) = 1$$

und mit l'Hôpital

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{a\sin(x)}{\ln(1+x)} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{a\cos(x)}{\frac{1}{1+x}} = \frac{a\cos(0)}{1} = a.$$

Daraus folgt

$$a = 1.$$

Zum zweiten Teil: Damit f an der Stelle $x=-\pi$ stetig ist, muss

$$\lim_{\substack{x\to -\pi\\ x<-\pi}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -\pi\\ x>-\pi}} f(x)$$

gelten. Es ist

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to -\pi\\ x<-\pi}} f(x) &= \lim_{\substack{x\to -\pi\\ x<-\pi}} bx^2 + x + d = b\pi^2 - \pi + d\\ \lim_{\substack{x\to -\pi\\ x>-\pi}} f(x) &= \lim_{\substack{x\to -\pi\\ x>-\pi}} \cos(x) = \cos(-\pi) = -1.\end{aligned}$$

Damit f an der Stelle $x=-\pi$ zusätzlich differenzierbar ist, muss die Ableitung von links $\lim_{\substack{x\to -\pi\\ x<-\pi}} \frac{f(x)-f(-\pi)}{x-(-\pi)}$ mit der Ableitung von rechts $\lim_{\substack{x\to -\pi\\ x>-\pi}} \frac{f(x)-f(-\pi)}{x-(-\pi)}$ übereinstimmen. Die Ableitung von links an der Stelle $x=-\pi$ der Funktion f ist die Ableitung der Funktion bx^2+x+d an der Stelle $x=-\pi$, also $-2b\pi+1$. Die Ableitung von rechts an der Stelle $x=-\pi$ der Funktion f ist die Ableitung der Funktion $\cos(x)$ an der Stelle $x=-\pi$, also $-\sin(-\pi)=0$. Insgesamt hat man die Bedingungen

$$b\pi^2 - \pi + d = -1 \qquad \text{und} \qquad -2b\pi + 1 = 0.$$

Daraus folgt

$$b = \frac{1}{2\pi} \qquad \text{und} \qquad d = -1 + \frac{\pi}{2}.$$

e) (*1 Punkt*) Zweimalige partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}\int_1^3 x^2 e^x\,dx &= x^2 e^x\Big|_1^3 - \int_1^3 2xe^x\,dx\\ &= (9e^3 - e) - 2\left(xe^x\Big|_1^3 - \int_1^3 e^x\,dx\right) = (9e^3-e) - 2(3e^3-e) + 2e^x\Big|_1^3\\ &= 5e^3 - e.\end{aligned}$$

f) (*1 Punkt*) Die Aufgabe folgt mit Partialbruchzerlegung. Der Nenner $Q(x) = x^2 + 4x + 4$ hat eine doppelte Nullstelle und zwar gilt $Q(x) = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$. Die rationale Funktion im Integral muss also in die Form $c \cdot \frac{Q'(x)}{Q(x)} + \frac{\text{Zahl}}{Q(x)}$ umgeschrieben. Es ist $Q'(x) = 2x + 4$ und somit

$$\frac{x+1}{x^2+4x+4} = \frac{\frac{1}{2}(2x+4)-1}{(x+2)^2} = \frac{1}{2}\frac{Q'(x)}{Q(x)} - \frac{1}{(x-2)^2}.$$

Die gesuchte Stammfunktion ist somit

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+1}{x^2+4x+4}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{Q'(x)}{Q(x)}\,dx - \int \frac{1}{(x+2)^2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\ln|Q(x)| - \frac{-1}{x+2} + C \\
&= \frac{1}{2}\ln((x+2)^2) + \frac{1}{x+2} + C \\
&= \ln(|x+2|) + \frac{1}{x+2} + C.
\end{aligned}$$

g) (*1 Punkt*) Die ersten beiden Ableitungen von f sind $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} - \ln(x)}{e^x}$ und $f''(x) = \frac{-\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + \ln(x)}{e^x}$. Das gesuchte Taylorpolynom ist also

$$\begin{aligned}
p(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 \\
&= 0 + \frac{1}{e}(x-1) - \frac{3}{2e}(x-1)^2 = -\frac{3}{2e}x^2 + \frac{4}{e}x - \frac{5}{2e}.
\end{aligned}$$

h) (*2 Punkte*) Die Potenzreihe hat die Form $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ mit $c_n = \frac{1}{n3^n}$ und $x_0 = 0$.

Der Konvergenzradius ist also

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)3^{n+1}}{n3^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3(n+1)}{n} = 3.$$

Für den Konvergenzbereich muss man noch die Konvergenz in den Randpunkten des Intervalls $(x_0 - r, x_0 + r) = (-3, 3)$ kontrollieren. Für die Randpunkte gilt:

falls $x = -3,$ dann ist die Reihe gleich $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n},$ also konvergent (alternierend)

falls $x = 3,$ dann ist die Reihe gleich $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$ also divergent (harmonische Reihe).

Der Konvergenzbereich ist somit das Intervall

$$[-3, 3).$$

i) (*1 Punkt*) Mit Trennung der Variablen folgt für die allgemeine Lösung

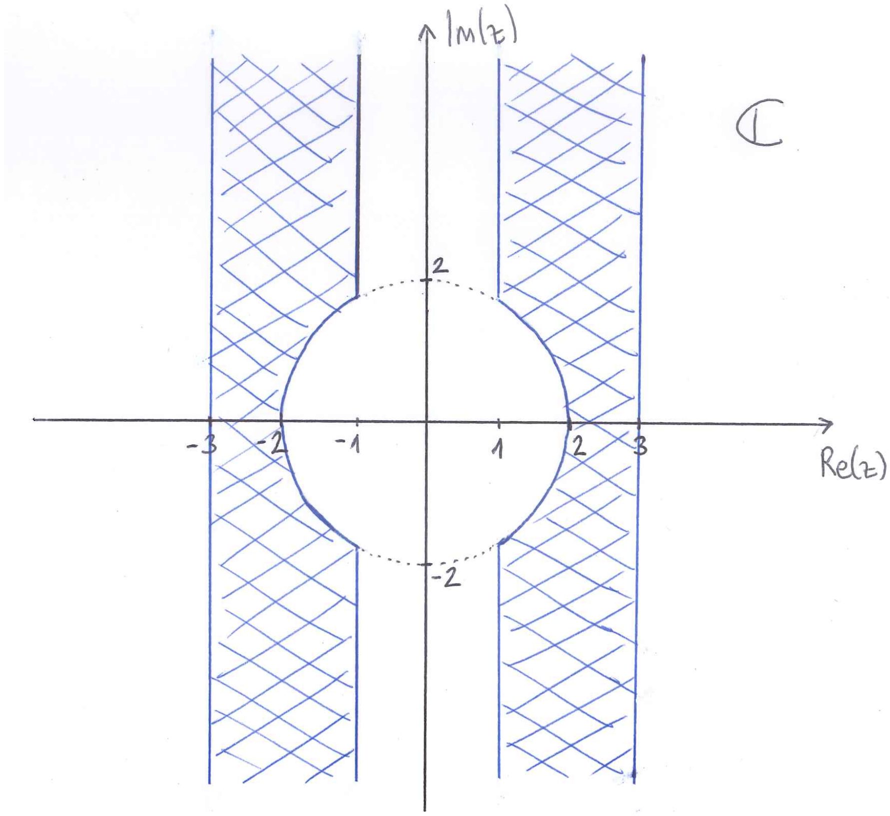
$$y'(x) = -3y(x)^2 \Longrightarrow \int \frac{1}{y^2} dy = \int -3\, dx \Longrightarrow -\frac{1}{y} = -3x + C \Longrightarrow y(x) = \frac{1}{3x - C}.$$

Die gesuchte spezielle Lösung des Anfangswertproblems ist somit

$$y(x) = \frac{1}{3x + \frac{1}{2}} = \frac{2}{6x + 1}.$$

2. (*8 Punkte*)

a) (*2 Punkte*) Die gesuchte Menge ist:



b) (*2 Punkte*) Der Betrag der zwei fehlenden Lösungen z_1 und z_2 ist $\frac{1}{\sqrt{2}}$ wie z_3. Um die Winkel zu erhalten, kann man zum Winkel der gegebenen Lösung Vielfache von $\frac{2\pi}{3}$ addieren. Man erhält so einerseits $\frac{7}{4}\pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{29}{12}\pi$ und andererseits $\frac{7}{4}\pi + 2 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{37}{12}\pi$. Zuletzt müssen diese Winkel durch Subtraktion von 2π wieder nach $[0, 2\pi)$ verschoben werden. Man erhält die Lösungen

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{5}{12}\pi} \qquad z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{13}{12}\pi}.$$

In trigonometrischer Darstellung ist es

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\cos\Big(\frac{5}{12}\Big) + i\sin\Big(\frac{5}{12}\Big)\Big) \quad z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\cos\Big(\frac{13}{12}\Big) + i\sin\Big(\frac{13}{12}\Big)\Big).$$

Alternativ: Gesucht ist $z = re^{i\varphi}$. Die rechte Seite der Gleichung in exponentieller

Darstellung ist

$$\frac{1}{4}(-1-i) = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{2} e^{i\frac{5}{4}\pi}.$$

Die zu lösende Gleichung ist somit ist $r^3 e^{i3\varphi} = \frac{\sqrt{2}}{4} e^{i\frac{5}{4}\pi}$. Daraus folgt $r = (\frac{\sqrt{2}}{4})^{\frac{1}{3}} = (2^{-\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\varphi = \frac{5}{12}\pi + \frac{2\pi k}{3}$ mit $k = 0, 1, 2$. Die Lösungen der Gleichung sind also in exponentieller Darstellung

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{5}{12}\pi} \qquad z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{13}{12}\pi}.$$

In trigonometrischer Darstellung ist es

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\cos\Big(\frac{5}{12}\Big) + i\sin\Big(\frac{5}{12}\Big)\Big) \quad z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\cos\Big(\frac{13}{12}\Big) + i\sin\Big(\frac{13}{12}\Big)\Big).$$

c) (*1 Punkt*) Für z gilt

$$z = e^{i\frac{\pi}{4}}\big(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)\big) = e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{i\alpha} = e^{i(\frac{\pi}{4}+\alpha)} = \cos(\tfrac{\pi}{4}+\alpha) + i\sin(\tfrac{\pi}{4}+\alpha).$$

Damit $\mathrm{Im}(z) = 0$ und $\mathrm{Re}(z) > 0$ gilt, braucht man also $\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha) = 0$ und $\cos(\frac{\pi}{4}+\alpha) > 0$. Aus der ersten Bedingung folgt $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ oder $\alpha = \frac{7\pi}{4}$. Nur $\alpha = \frac{7\pi}{4}$ erfüllt auch die zweite Bedingung. Die richtige Antwort ist

$$\alpha = \frac{7\pi}{4}.$$

d) (*3 Punkte*) Die erste Antwort ist

$$\frac{2}{1-\frac{1-i}{1+i}} = \frac{2}{1-\frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}} = \frac{2}{1-\frac{-2i}{2}} = \frac{4}{2+2i} = \frac{4(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)} = \frac{8-8i}{8} = 1-i.$$

Die zweite Antwort ist

$$e^{i\frac{3}{2}\pi} \cdot (1-i\sqrt{3})^3 = -i \cdot (2e^{-i\frac{\pi}{3}})^3 = -i \cdot 8e^{-i\pi} = -i \cdot (-8) = 8i.$$

Die dritte Antwort ist

$$\mathrm{Im}\Big(\overline{2i\big(\sqrt{-49}+3\big)}\Big) = \mathrm{Im}\big(\overline{2i(\pm 7i+3)}\big) = \mathrm{Im}(\overline{\mp 14+6i}) = \mathrm{Im}(\mp 14-6i) = -6.$$

3. (*12 Punkte*)

a) (*2 Punkte*) Die Determinante kann zum Beispiel durch Entwickeln nach der dritten Spalte und anschliessender Anwendung der Sarrus-Regel berechnet werden. Es folgt

$$\det\begin{pmatrix}-3 & 2 & 0 & 3\\ 1 & 2 & 3 & 1\\ 2 & -2 & 0 & -2\\ 4 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix} = -3\det\begin{pmatrix}-3 & 2 & 3\\ 2 & -2 & -2\\ 4 & 1 & 0\end{pmatrix} = -3(-16+6+24-6) = -24.$$

b) (*2 Punkte*) Man rechnet

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 4 & 0 & -4\\ 3 & 3 & 2 & -3\\ 0 & -6 & 4 & 6\end{array}\right) \xrightarrow{Z_2-\frac{3}{2}Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c}2 & 4 & 0 & -4\\ 0 & -3 & 2 & 3\\ 0 & -6 & 4 & 6\end{array}\right) \xrightarrow{Z_3-2Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c}2 & 4 & 0 & -4\\ 0 & -3 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right).$$

Sei $x_3 = t \in \mathbb{R}$. Es folgt $x_2 = -1 + \frac{2}{3}t$ und $x_1 = -\frac{4}{3}t$. Die Lösungsmenge ist also

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{4}{3}t\\ -1+\frac{2}{3}t\\ t\end{pmatrix} \quad \text{mit } t \in \mathbb{R}.$$

c) (*2+2+1 Punkte*)

i) Das charakteristische Polynom von C ist

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}4-\lambda & -4 & 2\\ -2 & 2-\lambda & -1\\ 1 & -5 & -\lambda\end{pmatrix} &= -\lambda(4-\lambda)(2-\lambda) + 4 + 20 - 2(2-\lambda) - 5(4-\lambda) + 8\lambda\\ &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 7\lambda\\ &= -\lambda(\lambda^2 - 6\lambda - 7).\end{aligned}$$

Die Nullstellen davon (und somit die Eigenwerte von C) sind

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = 7 \quad \text{und} \quad \lambda_3 = -1.$$

ii) Der grösste Eigenwert ist 7 (siehe Teilaufgabe i)). Die Eigenvektoren dazu findet man mit

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4-7 & -4 & 2 & 0 \\ -2 & 2-7 & -1 & 0 \\ 1 & -5 & 0-7 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -4 & 2 & 0 \\ -2 & -5 & -1 & 0 \\ 1 & -5 & -7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3 \leftrightarrow Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -7 & 0 \\ -2 & -5 & -1 & 0 \\ -3 & -4 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_3+3Z_1]{Z_2+2Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -7 & 0 \\ 0 & -15 & -15 & 0 \\ 0 & -19 & -19 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_3+19Z_2]{Z_2\cdot(-\frac{1}{15})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Die Eigenvektoren zum Eigenwert 7 haben somit die Form $\begin{pmatrix} 2t \\ -t \\ t \end{pmatrix}$ mit $t \neq 0$.

Gesucht ist der Eigenvektor der Länge 1, es muss also $\sqrt{(2t)^2 + (-t)^2 + t^2} = \sqrt{6t^2} = 1$ gelten. Daraus folgt $t = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$. Die zwei möglichen Antworten sind somit

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{oder} \qquad -\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

iii) Die Determinante einer Matrix ist gleich dem Produkt der Eigenwerte der Matrix. Diese haben wir in Teilaufgabe i) ausgerechnet (die Determinante von C ist also 0).

d) (*3 Punkte*) Die drei Vektoren sind linear abhängig genau dann, wenn der Rang der 4x3 Matrix, deren Spalten die gegebenen Vektoren sind, kleiner als 3 ist. Man rechnet für den Rang

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ c & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3-2Z_1]{Z_2-2Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & -8 & -8 \\ 0 & -9 & -9 \\ c & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2\cdot(-\frac{1}{8})]{Z_4-cZ_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -9 & -9 \\ 0 & 3-4c & 4-6c \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[Z_4\leftrightarrow Z_3]{Z_3+9Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3-4c & 4-6c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3-(3-4c)Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-2c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also Rang$=2$ falls $c=\frac{1}{2}$ und Rang$=3$ falls $c \neq \frac{1}{2}$. Somit sind die gegebenen Vektoren

$$\text{linear abhängig, falls } c = \frac{1}{2}$$
$$\text{linear unabhängig, falls } c \neq \frac{1}{2}.$$

4. (*11 Punkte*)

a) (*3 Punkte*) Damit $P = (3, y_0, 7)$ auf der gegebenen Fläche liegt, muss $7 = e^{3^2-9} + 9y_0 - 12y_0$ gelten, also

$$y_0 = -2.$$

Die Gleichung für die Tangentialebene in einem Punkt (x_0, y_0, z_0) ist

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0),$$

wobei $f(x, y) = e^{x^2-9} + x^2y - 4xy$ mit partiellen Ableitungen $f_x(x, y) = 2xe^{x^2-9} + 2xy - 4y$ und $f_y(x, y) = x^2 - 4x$. Setzt man $P = (3, -2, 7)$ ein folgt für die Gleichung der Tangentialebene

$$z = 7 + 2(x - 3) - 3(y + 2) = -5 + 2x - 3y.$$

b) (*5 Punkte*) Für die kritischen Punkte muss gelten

$$\begin{cases} f_x(x, y) = \frac{2x}{7+x^2} - y^2 + y = 0 \\ f_y(x, y) = -2xy + x = 0. \end{cases}$$

Die zweite Gleichung ist umgeschrieben $x(1 - 2y) = 0$, also muss entweder $x = 0$ oder $y = \frac{1}{2}$ sein. Setzt man $x = 0$ in die erste Gleichung ein, so folgt $-y^2 + y = y(1 - y) = 0$, also $y = 0$ oder $y = 1$. Setzt man hingegen $y = \frac{1}{2}$ in die erste Gleichung ein, so folgt $\frac{2x}{7+x^2} + \frac{1}{4} = 0$, also $x^2 + 8x + 7 = 0$ und somit $x = -1$ oder $x = -7$. Es gibt darum vier kritische Punkte

$$P_1 = (0, 0) \qquad P_2 = (0, 1) \qquad P_3 = (-1, \tfrac{1}{2}) \qquad P_4 = (-7, \tfrac{1}{2}).$$

Der Ausdruck $\Delta(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$ ist hier

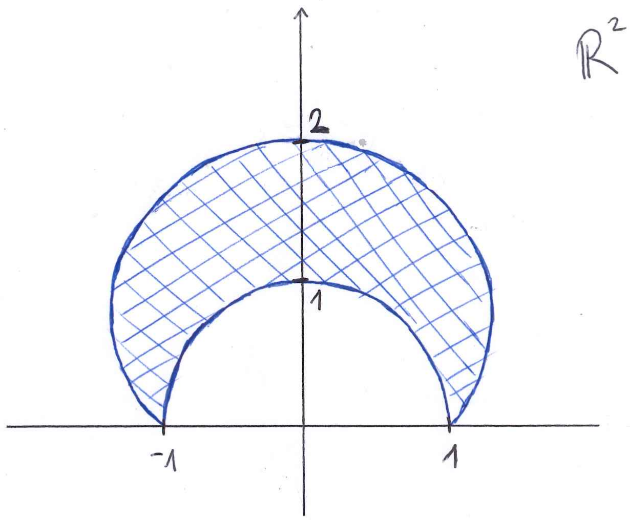
$$\Delta(x, y) = \frac{14 - 2x^2}{(7 + x^2)^2} \cdot (-2x) - (-2y + 1)^2.$$

Somit ist $\Delta(P_1) < 0$, $\Delta(P_2) < 0$ und $\Delta(P_4) < 0$ während $\Delta(P_3) > 0$ mit $f_{xx}(P_3) > 0$. Folglich befindet sich bei

$$P_3 \text{ ein relatives Minimum.}$$

c) (*1 + 2 Punkte*)

i) Das gesuchte Gebiet ist:



ii) Mit der Formel für Gebietsintegrale in Polarkoordinaten und dem Hinweis hat man

$$\begin{aligned}
\iint_A dA &= \int_0^\pi \int_1^{1+\sin(\varphi)} r\,dr d\varphi = \int_0^\pi \frac{1}{2} r^2\Big|_1^{1+\sin(\varphi)}\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^\pi (2\sin(\varphi) + \sin^2(\varphi))\,d\varphi \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(2\sin(\varphi) + \frac{1}{2} - \frac{\cos(2\varphi)}{2}\right) d\varphi = \frac{1}{2}\Big(-2\cos(\varphi) + \frac{\varphi}{2} - \frac{\sin(2\varphi)}{4}\Big)\Big|_0^\pi \\
&= 2 + \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

5. (*8 Punkte*)

a) (*3 Punkte*) Die homogene Differentialgleichung $y'(x) = 2x^3 y(x)$ besitzt die Lösung

$$y_h(x) = Ke^{\frac{x^4}{2}} \quad \text{mit } K \in \mathbb{R} \text{ Konstante.}$$

Der Ansatz für die inhomogene Differentialgleichung ist somit $y(x) = K(x)e^{\frac{x^4}{2}}$. Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt das die Bedingung

$$K'(x)e^{\frac{x^4}{2}} = e^{\frac{x^4}{2}+2x} \quad \Longrightarrow \quad K(x) = \int e^{2x}\,dx = \frac{e^{2x}}{2} + C.$$

Die allgemeine Lösung ist also

$$y(x) = \Big(\frac{e^{2x}}{2} + C\Big)e^{\frac{x^4}{2}} = Ce^{\frac{x^4}{2}} + \frac{1}{2}e^{\frac{x^4}{2}+2x} \quad \text{mit } C \in \mathbb{R} \text{ Konstante.}$$

Für die gesuchte Lösung des Anfangswertproblems setzt man die Bedingungen $y(0) = 1$ ein. Es gilt $y(0) = C + \frac{1}{2}$, also $C = \frac{1}{2}$. Die gesuchte Lösung ist also

$$y(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x^4}{2}}(1 + e^{2x}).$$

b) (*5 Punkte*) Die homogene Differentialgleichung $y''(x)+4y'(x)+8y(x) = 0$ besitzt die charakteristische Gleichung $\lambda^2+4\lambda+8 = 0$ mit nicht-reellen Lösungen $\lambda_{1/2} = -2 \pm 2i$. Somit ist die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung gegeben durch

$$y_h(x) = e^{-2x}(C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x)) \quad \text{mit } C_1, C_2 \in \mathbb{R} \text{ Konstanten.}$$

Für eine partikuläre Lösung $y_p(x)$ der inhomogenen Differentialgleichung benutzt man den Ansatz

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C,$$

da die Störfunktion ein Polynom 2. Grades ist. Für diesen Ansatz gilt $y_p'(x) = 2Ax + B$ und $y_p''(x) = 2A$. Der partikuläre Ansatz ergibt eingesetzt in die inhomogene Differentialgleichung die Bedingung

$$2A + 4(2Ax + B) + 8(Ax^2 + Bx + C) = 2x^2 + 6x + \frac{1}{2}.$$

Koeffizientenvergleich liefert die Gleichungen $8A = 2$, $8A+8B = 6$ und $2A+4B+8C = \frac{1}{2}$ und somit $A = \frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{2}$ und $C = -\frac{1}{4}$. Die gesuchte allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist also

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^{-2x}(C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x)) + \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}.$$

6. (*9 Punkte*)

a) (*2 Punkte*) Mögliche Parametrisierungen sind

$$C_1: \qquad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ -\cos(t) \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad -\pi \leq t \leq \pi$$

$$C_2: \qquad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \pi \\ 1+2t \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

b) (*3 Punkte*) Ortsvektor $\vec{r}(t)$ der Kurve C_1 aus Teilaufgabe a) in Vektorfeld $\vec{F}$ einsetzen ergibt

$$\vec{F}(x(t), y(t)) = \begin{pmatrix} t^2 + 2\cos(t) \\ 4t \end{pmatrix}.$$

Der Ortsvektor $\vec{r}(t)$ der Kurve C_1 wird jetzt abgeleitet und das Skalarprodukt $\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}$ gebildet

$$\dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sin(t) \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = t^2 + 2\cos(t) + 4t\sin(t).$$

Dieses Skalarprodukt muss man schliesslich in den Grenzen von t integrieren

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{-\pi}^{\pi} (t^2 + 2\cos(t) + 4t\sin(t))\, dt \\ &\overset{(*)}{=} \left(\frac{t^3}{3} + 2\sin(t)\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} + 4\Bigg(-t\cos(t)\big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} -\cos(t)\, dt\Bigg) \\ &= \frac{2\pi^3}{3} + 8\pi, \end{aligned}$$

wobei man in $(*)$ partielle Integration braucht.

c) (*3 Punkte*)

Mit

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - 2y \\ 4x \end{pmatrix}$$

und der Formel von Green folgt

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_A \left(\frac{\partial}{\partial x} Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} P(x,y)\right) dA,$$

wobei A das durch die Kurve C eingeschlossene Gebiet ist. Hier ist

$$\frac{\partial}{\partial x}Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}P(x,y) = 4 + 2 = 6$$

und A kann geschrieben werden als

$$A = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ -\pi \le x \le \pi\,,\ -\cos(x) \le y \le 2 + \frac{1}{\pi}x\Big\}.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}\iint_A \Big(\frac{\partial}{\partial x}Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}P(x,y)\Big)\,dA &= 6\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\cos(x)}^{2+\frac{1}{\pi}x} dydx \\ &= 6\int_{-\pi}^{\pi}\Big(2 + \frac{1}{\pi}x + \cos(x)\Big)\,dx = 6\Big(2x + \frac{1}{2\pi}x^2 + \sin(x)\Big)\Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= 24\pi.\end{aligned}$$

Somit ist

$$\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 24\pi.$$

d) (*1 Punkt*) Es gilt

$$\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} + \int_{C_2} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} + \int_{C_3} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$$

und somit folgt mit Teilaufgabe b) und c)

$$\int_{C_3} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 24\pi - \Big(\frac{2\pi^3}{3} + 8\pi\Big) - 8\pi = 8\pi - \frac{2\pi^3}{3}.$$