Prof. W. Farkas **ETH Zürich, August 2017**

D-BIOL, D-CHAB, D-HEST

Prüfung zur Vorlesung Mathematik I/II

Bitte ausfüllen!

Name:	
Vorname:	
Legi-Nr.:	

Nicht ausfüllen!

Aufgabe	Punkte	Kontrolle
1		
2		
3		
4		
5		
6		
Total		

Bitte wenden!

Wichtige Hinweise zur Prüfung

Prüfungsdauer: 3 Stunden.

Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten (nicht Blätter!) mit persönlichen, von Hand geschriebenen Notizen. Keine (Taschen)Rechner. 1 Wörterbuch für fremdsprachige Studierende.

Bitte beachten Sie folgende Punkte:

- Tragen Sie **jetzt** Ihren Namen in das Deckblatt ein und geben Sie es **am Ende** der Prüfung als vorderstes Blatt Ihrer Arbeit ab.
- Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch.
- Beginnen Sie jede Aufgabe **auf einem neuen Blatt**.
- Begründen Sie Ihre Lösungen, soweit nicht anders angegeben. Dabei können Sie bekannte Formeln aus der Vorlesung und den Übungen ohne Herleitung verwenden.
- Schreiben Sie **nicht** mit Bleistift und **nicht** mit roter oder grüner Farbe.
- Benützen Sie **keine** Korrekturstifte. Streichen Sie fehlerhafte Ausdrücke durch und schreiben Sie die Ausdrücke neu.
- Die Reihenfolge der Bearbeitung der Aufgaben ist Ihnen freigestellt. Ordnen Sie jedoch am Ende der Prüfung die Aufgaben für die Abgabe.
- Wir erwarten nicht, dass Sie alle Aufgaben lösen. Versuchen Sie einfach Ihr Bestes! Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet.

Viel Erfolg!

Siehe nächstes Blatt!

Aufgaben

---

1. (*12 Punkte*)

Die Antworten in dieser Aufgabe müssen Sie **nicht** begründen. Schreiben Sie die Antworten **vollständig gekürzt und vereinfacht** direkt auf das Aufgabenblatt. Antworten auf anderen Blättern werden nicht bewertet. Für jede korrekt ausgefüllte Lücke gibt es einen Punkt. Es gibt keine Teilpunkte.

a) Sei $(a_n)_n$ die Folge gegeben durch

$$a_n = \frac{18n^5 + 2n^2 - 7}{3n^5 - 2n^4 + 6n}.$$

Berechnen Sie den Grenzwert der Folge.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \underline{\hspace{4cm}}$$

b) Sei die Funktion f gegeben durch $f(x) = 2\sqrt{x}\sin(x^{\frac{3}{2}})$ für $x > 0$. Berechnen Sie die Ableitung der Funktion f.

$$f'(x) = \underline{\hspace{12cm}}$$

c) Sei $c \in \mathbb{R}$. Die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{1+x}{e^{2x}}$ ist für $x < c$ streng monoton wachsend und für $x > c$ streng monoton fallend. Bestimmen Sie c.

$$c = \underline{\hspace{4cm}}$$

d) Seien a, b, $d \in \mathbb{R}$ und sei die Funktion f gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} bx^2 + x + d & \text{für } x < -\pi \\ \cos(x) & \text{für } -\pi \leq x \leq 0 \\ \dfrac{a\sin(x)}{\ln(1+x)} & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Wie muss a gewählt werden, damit die Funktion f an der Stelle $x = 0$ stetig ist?

$$a = \underline{\hspace{4cm}}$$

Wie müssen b und d gewählt werden, damit die Funktion f an der Stelle $x = -\pi$ stetig **und** differenzierbar ist?

$$b = \underline{\hspace{4cm}} \qquad \text{und} \qquad b = \underline{\hspace{4cm}}$$

Bitte wenden!

e) Berechnen Sie folgendes bestimmte Integral.

$$\int_1^3 x^2 e^x \, dx = \underline{\hspace{8cm}}$$

f) Berechnen Sie folgendes unbestimmte Integral.

$$\int \frac{x+1}{x^2+4x+4} \, dx = \underline{\hspace{8cm}}$$

g) Sei f die Funktion gegeben durch

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{e^x}.$$

Finden Sie das Taylor-Polynom 2. Ordnung von f um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

$$p(x) = \underline{\hspace{8cm}}.$$

h) Gegeben sei die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\,3^n}.$$

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe.

Der Konvergenzradius ist ______________.

Bestimmen Sie nun den Konvergenzbereich der Potenzreihe.

Der Konvergenzbereich ist ______________.

i) Finden Sie die Lösung des Anfangwertproblems

$$y'(x) = -3y(x)^2 \quad \text{für } x \geq 0 \text{ mit } y(0) = 2.$$

Die Lösung ist

$$y(x) = \underline{\hspace{8cm}}.$$

2. (*8 Punkte*)

In der folgenden Aufgabe bezeichnet i die imaginäre Einheit. Es gilt also $i^2 = -1$. Weiter beschreibt $\bar{z}$ die zu einer Zahl z konjugiert komplexe Zahl.

Die Antworten in dieser Aufgabe müssen Sie **nicht** begründen.

Schreiben Sie die Antworten der Aufgaben **2b) - 2d) vollständig gekürzt und vereinfacht** direkt auf das Aufgabenblatt. Antworten auf anderen Blättern werden nicht bewertet. Für jede korrekt ausgefüllte Lücke gibt es einen Punkt. Es gibt keine Teilpunkte.

Die **Aufgabe 2a)** lösen Sie auf einem separatem Blatt.

a) Stellen Sie folgende Menge komplexer Zahlen in der Gauss'schen Zahleneben $\mathbb{C}$ dar.

$$\left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, 1 \leq |\mathrm{Re}(z)| \leq 3 \text{ und } |z| \geq 2\right\}$$

b) Die Gleichung

$$z^3 = \frac{1}{4}(-1-i)$$

besitzt drei Lösungen z_1, z_2 und z_3 in den komplexen Zahlen.

Geben Sie die Lösungen **in Polardarstellung** an, das heisst entweder in trigonometrischer Darstellung $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ oder in exponentieller Darstellung $z = re^{i\varphi}$ mit jeweils $r \geq 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ an. Schreiben Sie Ihre Antwort **direkt auf das Aufgabenblatt.**

$z_1 =$ ______________ $z_2 =$ ______________ $z_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{7}{4}\pi}$

c) Sei $\alpha \in [0, 2\pi)$. Und sei

$$z = e^{i\frac{\pi}{4}}\big(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)\big).$$

Wie muss α gewählt werden, damit z eine **positive reelle** Zahl ist? Das heisst, damit $\mathrm{Im}(z) = 0$ und $\mathrm{Re}(z) > 0$ gilt?

Schreiben Sie Ihre Antwort **direkt auf das Aufgabenblatt.**

$\alpha =$ ______________

d) Schreiben Sie Ihre Antwort **direkt auf das Aufgabenblatt.**

Schreiben Sie folgende komplexe Zahlen **in kartesischer Darstellung** $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\frac{2}{1 - \frac{1-i}{1+i}} = \text{______________}$$

$$e^{i\frac{3}{2}\pi}(1 - i\sqrt{3})^3 = \text{______________}$$

Berechnen Sie den **Imaginärteil** der komplexen Zahl $\overline{2i\big(\sqrt{-49}+3\big)}$, also

$$\mathrm{Im}\Big(\overline{2i\big(\sqrt{-49}+3\big)}\Big) = \text{______________}.$$

Bitte wenden!

3. (*12 Punkte*)

a) Die Matrix A sei

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rechnen Sie die Determinante von A aus.

b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \\ 0 & -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

mit dem Gauss-Verfahren und geben Sie die Lösungsmenge an.

c) Die Matrix C sei

$$C = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

i) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix C.
ii) Finden Sie einen Eigenvektor der Länge 1 zum grössten Eigenwert von C.
iii) Begründen Sie, wieso Sie die Determinante von C mit Teilaufgabe i) und ii) ohne weitere Rechnung direkt angeben können.

d) Sei $c \in \mathbb{R}$. Gegeben seien die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie in Abhängigkeit von c, ob die Vektoren linear abhängig sind oder nicht.

Siehe nächstes Blatt!

4. (*11 Punkte*)

a) Bestimmen Sie $y_0 \in \mathbb{R}$ so, dass der Punkt $P = (3, y_0, 7)$ auf der Fläche in $\mathbb{R}^3$ gegeben durch die Gleichung

$$z = e^{x^2-9} + x^2y - 4xy$$

liegt. Bestimmen Sie anschliessend die Gleichung der Tangentialebene an diese Fläche im Punkt P.

b) Sei f die Funktion gegeben durch

$$f(x,y) = \ln(7 + x^2) - xy^2 + xy.$$

Bestimmen Sie alle kritischen Punkte der Funktion f.

Einer der kritischen Punkte ist ein relatives Minimum. Bestimmen Sie diesen kritischen Punkt.

c) Gegeben sei folgendes Gebiet A der Ebene **in Polarkoordinaten**

$$A = \big\{(r,\varphi)\,|\,0 \le \varphi \le \pi\,,\ 1 \le r \le 1 + \sin(\varphi)\big\}.$$

i) Skizzieren Sie das Gebiet A in der Ebene.

ii) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Gebietes A. Mit anderen Worten, berechnen Sie

$$\iint_A dA.$$

Hinweis: Das kann auch ohne Skizze aus i) gelöst werden.
Es gilt $\sin^2(\varphi) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\varphi))$.

5. (*8 Punkte*)

a) Finden Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = 2x^3 y(x) + e^{\frac{x^4}{2}+2x} \qquad \text{mit } y(0) = 1.$$

b) Finden Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) + 4y'(x) + 8y(x) = 2x^2 + 6x + \frac{1}{2}.$$

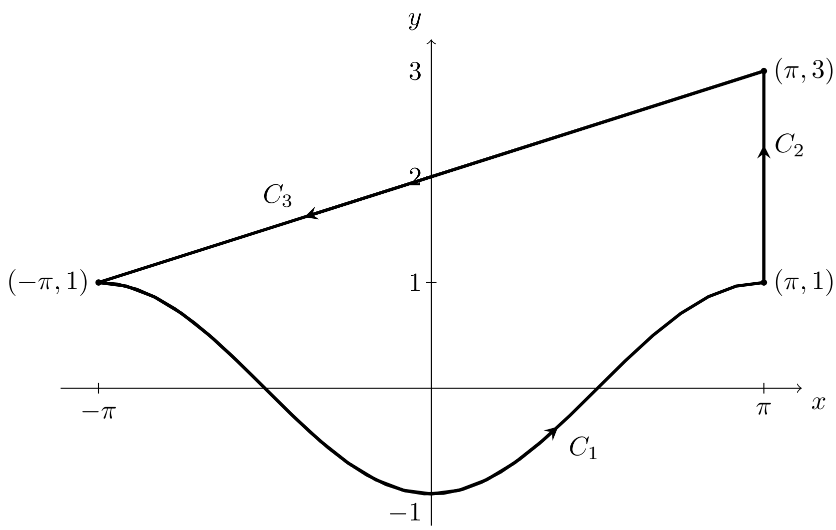
6. (*9 Punkte*)

Beachten Sie die Teilaufgaben 6c) und 6d) auf der Rückseite!!!

Das Vektorfeld $\overrightarrow{F}$ sei gegeben durch

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - 2y \\ 4x \end{pmatrix}.$$

Weiter seien die drei Kurven C_1, C_2 und C_3 in der folgenden Abbildung gegeben (die Pfeile kennzeichnen die Durchlaufrichtung!). Die Kurve C_1 folgt der Funktion $y = -\cos(x)$ von $(-\pi, 1)$ bis $(\pi, 1)$; die Kurve C_2 ist die geradlinige Verbindungen von $(\pi, 1)$ nach $(\pi, 3)$; die Kurve C_3 ist die geradlinige Verbindungen von $(\pi, 3)$ nach $(-\pi, 1)$.



a) **Geben Sie für $\mathbf{C_1}$ und $\mathbf{C_2}$** jeweils eine mögliche Parametrisierung durch einen Ortsvektor $\overrightarrow{r}(t)$ an. Achten Sie dabei auf die Durchlaufrichtung. Schreiben Sie Ihre Antwort **direkt auf das Aufgabenblatt**. Sie müssen Ihre Antwort **nicht** begründen. Antworten auf anderen Blättern werden nicht bewertet.

C_1 : $\quad \overrightarrow{r}(t) = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$ für ________ $\leq t \leq$ ________

C_2 : $\quad \overrightarrow{r}(t) = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$ für ________ $\leq t \leq$ ________

b) Berechnen Sie das Linienintegral des Vektorfeldes $\overrightarrow{F}$ entlang der Kurve C_1, also

$$\int_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}.$$

Bitte wenden!

c) Sei $C = C_1 + C_2 + C_3$ die geschlossene Kurve, die aus den drei Teilkurven C_1, C_2 und C_3 zusammengesetzt ist. Berechnen Sie das Linienintegral des Vektorfeldes $\overrightarrow{F}$ entlang der Kurve $C = C_1 + C_2 + C_3$, also

$$\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}.$$

d) Berechnen Sie das Linienintegral des Vektorfeldes $\overrightarrow{F}$ entlang der Kurve C_3, also

$$\int_{C_3} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}.$$

Hinweis: Das folgt auch ohne weitere Rechnung direkt aus den Teilaufgaben b) und c). Dabei dürfen Sie ohne Rechnung benutzen, dass für das Linienintegral von $\overrightarrow{F}$ entlang der Kurve C_2 gilt

$$\int_{C_2} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 8\pi.$$