**Dr. A. Caspar**

**ETH Zürich, August 2018**

D-BIOL, D-CHAB, D-HEST

# Prüfung zur Vorlesung Mathematik I/II

---

**Bitte ausfüllen!**

| | |
|---|---|
| Name: | |
| Vorname: | |
| Legi-Nr.: | |

**Nicht ausfüllen!**

| Aufgabe | Punkte | Kontrolle |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |
| Total | | |

| | |
|---|---|
| Vollständigkeit | |

**Bitte wenden!**

# Wichtige Hinweise zur Prüfung

---

**Prüfungsdauer:** 3 Stunden.

**Erlaubte Hilfsmittel:** 20 A4-Seiten (**nicht** Blätter) mit persönlichen, von Hand geschriebenen Notizen. Keine (Taschen)Rechner. 1 Wörterbuch für fremdsprachige Studierende.

**Bitte beachten Sie folgende Punkte:**

- Tragen Sie **jetzt** Ihren Namen in das Deckblatt ein.
- Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch.
- Schreiben Sie **nicht** mit Bleistift und **nicht** mit roter oder grüner Farbe.
- Beantworten Sie die Aufgaben (wenn nicht anders angegeben) **direkt auf dem Prüfungsblatt**. Zwischenschritte werden (wenn nicht anders angegeben) nicht bewertet.
- Tragen Sie Ihre Antwort auf die dafür vorgesehe Linie ein ("**Antwort:** ______"), beziehungsweise bei Single-Choice-Aufgaben kreuzen Sie Ihre Antwort an ("$\otimes$").
  Antworten oder Kreuze an anderen Stellen werden nicht bewertet.
- Es gibt zwei Formate bei den Single-Choice-Aufgaben:
  - **1 aus 4:** Hier ist **genau eine** Antwort korrekt. Für das korrekte Kreuz gibt es einen Punkt.
  - **Richtig/Falsch:** Für das korrekte Kreuz gibt es einen halben Punkt.

  Punktabzug bei falschen Antworten gibt es nicht.
- Es gibt **Teilaufgaben, die auf einem separaten Blatt** beantwortet werden. Nur bei diesen Teilaufgaben werden Zwischenschritte bewertet. Bei diesen Teilaufgaben gibt es einen entsprechenden Hinweis ("**Bearbeiten Sie Ihre Antwort auf einem separaten Blatt. Zwischenschritte werden bewertet.**").
- Wir erwarten nicht, dass Sie alle Aufgaben lösen.
  Versuchen Sie einfach Ihr Bestes! Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet. Die Reihenfolge der Bearbeitung der Aufgaben ist Ihnen freigestellt.
- **Am Ende der Prüfung**
  1. Ordnen Sie Ihre zusätzlichen Lösungsblätter nach Aufgaben.
  2. Stecken Sie diese zusammen mit Ihrer Prüfung zuoberst in den bereitliegenden Umschlag. Dieser wird am Ende eingesammelt.

$\boxed{\text{Viel Erfolg!}}$

# Aufgaben

---

**1.** (*10 Punkte*)

**a)** Betrachten Sie die Funktion $f$ mit $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

(i) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f$.

**Antwort:** $f'(x) =$ ____________________

(ii) Sei $T_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ das zweite Taylor-Polynom von $f$ an der Stelle $x_0 = 0$.

Berechnen Sie $a_0$, $a_1$ und $a_2$.

**Antwort:** $a_0 =$ __________ $a_1 =$ __________ $a_2 =$ __________

**b)** Betrachten Sie die Funktion $g$ mit $g(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$.

(i) Bestimmen Sie die Fixpunkte der Funktion $g$.

**Antwort:** ________________________________________

(ii) Sei $(x_n)_n$ eine Folge mit Reproduktionsfunktion $g$, das heisst, $x_{n+1} = g(x_n)$. Sei jeweils $x_0$ ein Startwert der Folge in der Nähe eines Fixpunktes $\widetilde{x}$ von $g$.

Für wie viele Fixpunkte von $g$ gilt dann $\widetilde{x} = \lim_{n \to \infty} x_n$?

◯ **(A)** Für keinen.

◯ **(B)** Für einen.

◯ **(C)** Für zwei.

◯ **(D)** Für drei.

(iii) Die Funktion $g$ ist auf einem Intervall $]a, b[$ streng monoton wachsend.
Bestimmen Sie $a$ und $b$.

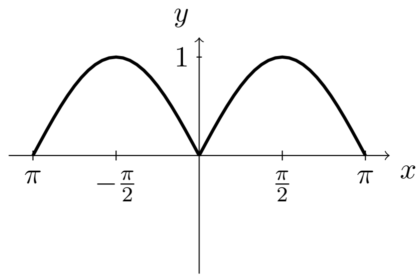
**Antwort:** $a =$ __________ $b =$ __________

**c)** Betrachten Sie die Funktion $h$ mit $h(x) = \left|\cos^2\left(\frac{1}{2}x\right) - \sin^2\left(\frac{1}{2}x\right)\right|$.

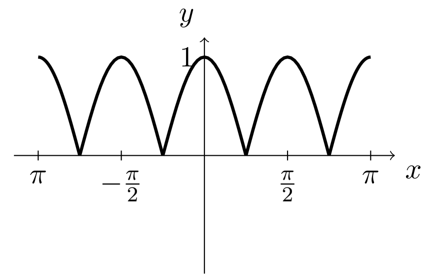
(i) Welcher Graph passt zu der Funktion $h$?

**Hinweis:** Verwenden Sie zum Beispiel $\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$.

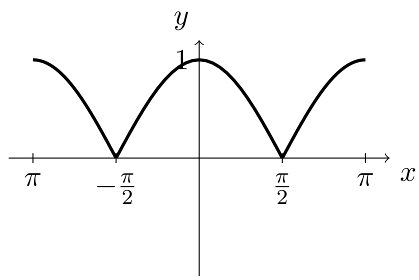
◯ **(A)**



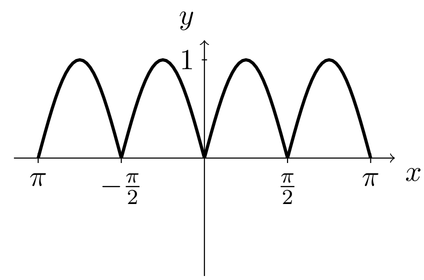

◯ **(C)**




◯ **(B)**




◯ **(D)**



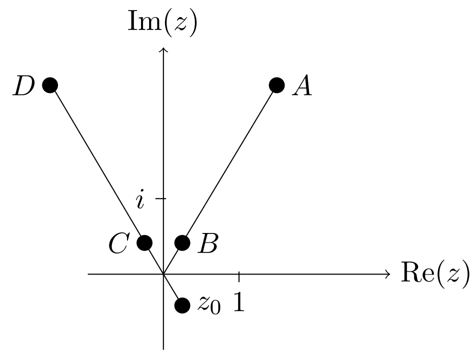

(ii) Berechnen Sie das bestimmte Integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x)dx$.

**Antwort:** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x)dx =$ __________________________

**Siehe nächstes Blatt!**

**2.** (*14 Punkte*)

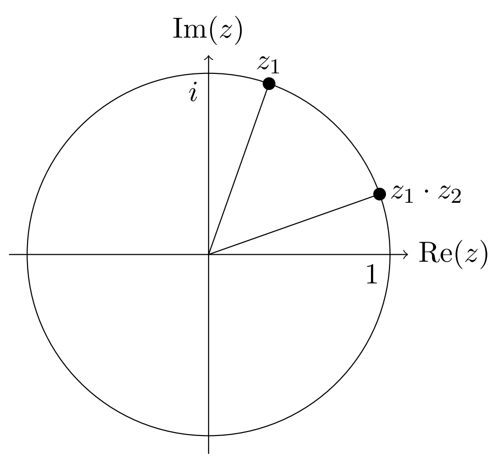
**a)** Sei die komplexe Zahl $z_0$ wie auf der Abbildung unten.




Welcher Buchstabe gehört zu $\frac{1}{z_0}$?

- ◯ **(A)**
- ◯ **(B)**
- ◯ **(C)**
- ◯ **(D)**

**b)** Seien die komplexen Zahlen $z_1$ und $z_1 \cdot z_2$ wie auf der Abbildung unten, mit $|z_1| = |z_1 \cdot z_2| = 1$ und $\arg(z_1) = \arg(z_1 \cdot z_2) + \frac{\pi}{4}$.




Bestimmen Sie den Realteil $\mathrm{Re}(z_2)$ und den Imaginärteil $\mathrm{Im}(z_2)$ von $z_2$.

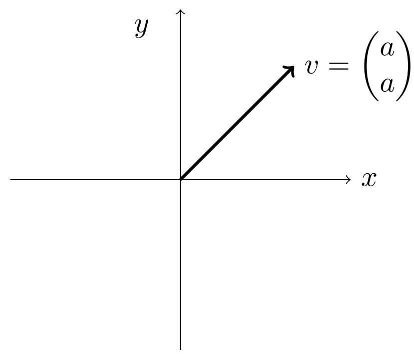
**Antwort:** $\mathrm{Re}(z_2) =$ ____________________________ $\mathrm{Im}(z_2) =$ ____________________________

**Bitte wenden!**

**c)** Seien $A = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & -\sin(\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$ eine Matrix und $v = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$ mit $a > 0$ ein Vektor.

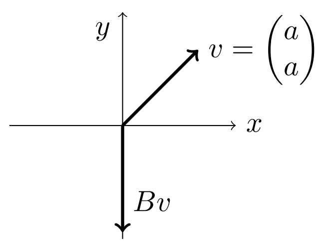
Zeichnen Sie den Vektor $Av$ in die folgende Abbildung und schreiben Sie seine Koordinaten ein.

**Antwort:**




**d)** Seien $B = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$ eine Matrix und $v = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$ mit $a > 0$ ein Vektor.

Welcher Winkel $\varphi$ mit $0 \leq \varphi < 2\pi$ passt zu der Abbildung unten?




**Antwort:** $\varphi =$ ____________________________

**e)** Seien $E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit einer Konstanten $b \in \mathbb{R}$ und $F = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Sei $EF$ die Produktmatrix.

(i) Bestimmen Sie $b$ so, dass $\det(EF) = 2018$ ist.

**Antwort:** $b =$ ______________

(ii) Entscheiden Sie jeweils, ob die Aussage richtig oder falsch ist?

| **richtig** | **falsch** | |
|---|---|---|
| ◯ | ◯ | Für $b \in \mathbb{R}$, ist $\det(EF)$ auch eine reelle Zahl. |
| ◯ | ◯ | Es gilt hier $EF = FE$. |
| ◯ | ◯ | Die Produktmatrix $EF$ ist eine Diagonalmatrix. |
| ◯ | ◯ | Für $b \neq 0$, ist $E^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. |
| ◯ | ◯ | Für $b > 0$ reell, ist das Produkt der Eigenwerte von $EF$ eine negative reelle Zahl. |
| ◯ | ◯ | Für $b > 0$ reell, ist die Summe der Eigenwerte von $EF$ eine negative reelle Zahl. |
| ◯ | ◯ | Ist $\lambda$ ein Eigenwert von $E$, so ist $\lambda^2$ ein Eigenwert von $EF$. |

**f)** Betrachten Sie die Matrix $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(i) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix $C$.

**Antwort:** ____________________________________________

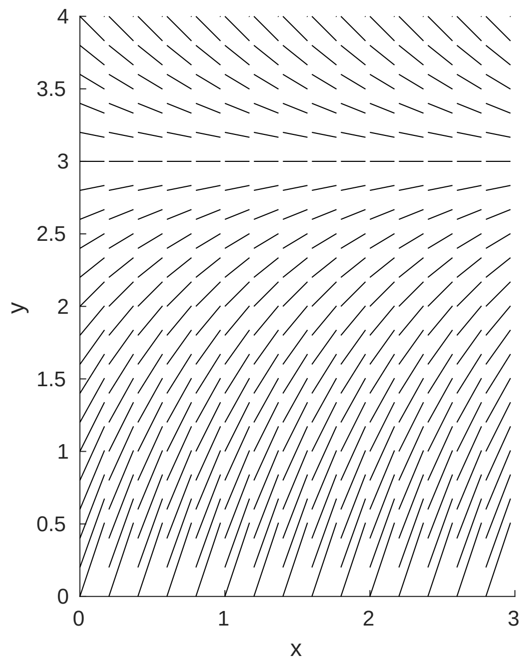
(ii) Die Matrix $C$ definiert ein Entwicklungsmodell $v_{n+1} = Cv_n$.

Finden Sie einen Startvektor $v_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit reellen Koordinaten $x_0, y_0, z_0$, sodass das Modell eine periodische Entwicklung mit $v_{n+4} = v_n$ beschreibt. Begründen Sie Ihre Antwort.

**Bearbeiten Sie Ihre Antwort auf einem separaten Blatt. Zwischenschritte werden bewertet.**

**3.** (*14 Punkte*)

**a)** Das folgende Richtungsfeld gehört zu der Differentialgleichung $y'(x) = -2y(x) + b$ mit konstantem Koeffizienten $b \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie $b$.




**Antwort:** $b =$ ____________

**b)** Gegeben sei ein Anfangswertproblem (AWP):

$$y'(x) = (y(x) - 2)(y(x) - 4), \quad y(0) = y_0.$$

Finden Sie ein $y_0$ so, dass der Graph der Lösungskurve des AWP **genau einen** Wendepunkt hat.

**Antwort:** $y_0 =$ ____________

**c)** Sei $y(x) = \dfrac{1}{5x^2 + C}$ die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung.

Mit welcher Anfangsbedingung $(x_0, y_0)$ ist diese Lösungsfunktion eine Funktion, welche auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist?

- ◯ **(A)** $(x_0, y_0) = (1, 1)$
- ◯ **(B)** $(x_0, y_0) = (1, 2)$
- ◯ **(C)** $(x_0, y_0) = (2, 1)$
- ◯ **(D)** $(x_0, y_0) = (0, 1)$

**d)** Bestimmen Sie die Lösungsfunktion des Anfangswertproblems mit

$$y'(x) = -6x\, y^2(x) \qquad y(0) = 1$$

**Bearbeiten Sie Ihre Antwort auf einem separaten Blatt. Zwischenschritte werden bewertet.**

**e)** Wir betrachten das System von Differentialgleichungen

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Stellen Sie eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung für $y_1$ auf, mit deren Lösung dann die allgemeine Lösung des Systems bestimmt werden kann.

Diese Differentialgleichung müssen Sie **nicht** lösen.

**Bearbeiten Sie Ihre Antwort auf einem separaten Blatt. Zwischenschritte werden bewertet.**

**f)** Wir betrachten die folgende Differentialgleichung

$$y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = 0.$$

(i) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

(ii) Geben Sie diejenige Lösung an, welche die Anfangsbedingungen $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$ erfüllt.

**Bearbeiten Sie Ihre Antwort auf einem separaten Blatt. Zwischenschritte werden bewertet.**

**4.** (*10 Punkte*)

**a)** Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = 3x^2 - y^2 + 4x - 5y - 1$.

(i) Welcher Punkt liegt auf der Niveaulinie von $f$ zur Höhe 6?

- ◯ **(A)** $(1, 2)$
- ◯ **(B)** $(1, 0)$
- ◯ **(C)** $(-1, -1)$
- ◯ **(D)** $(-1, 2)$

(ii) Wie viele lokale Extrema hat die Funktion $f$?

- ◯ **(A)** Keines.
- ◯ **(B)** Genau eines.
- ◯ **(C)** Genau zwei.
- ◯ **(D)** Genau drei.

**b)** Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $g(x, y) = 3x^3 - 2y^2 + x - 2y$.

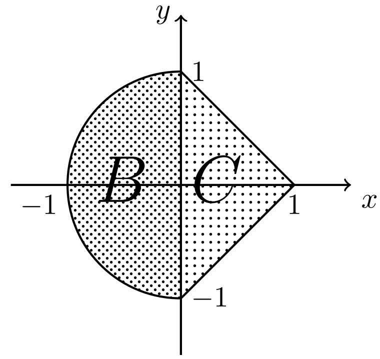
Die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen der Funktion $g$ im Punkt $(1, 1, 0)$ ist gegeben durch

$$l(x, y) = z = a(x - 1) + b(y - 1).$$

Bestimmen Sie $a$ und $b$.

**Antwort:** $a =$ ____________________ $b =$ ____________________

**c)** Wir haben zwei einfache geschlossene Gebiete $B$ (Halbkreis) und $C$ (Dreieck):




Der Abschnitt auf der $y$-Achse gehört jeweils zu $B$ und auch zu $C$.

(i) Beschreiben Sie $B$ als einfaches Gebiet in Polarkoordinaten:

**Antwort:** $B =$ ____________________________________________

(ii) Beschreiben Sie $C$ als einfaches Gebiet in kartesischen Koordinaten:

**Antwort:** $C =$ ____________________________________________

(iii) Sei $h(x, y) = 1 - y$. Berechnen Sie

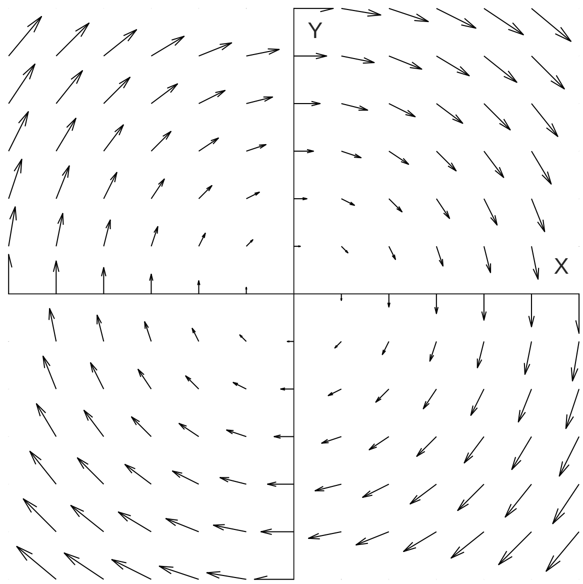
$$\iint_C h(x, y) dA.$$

**Bearbeiten Sie Ihre Antwort auf einem separaten Blatt. Zwischenschritte werden bewertet.**

**Bitte wenden!**

**5.** (*12 Punkte*)

**a)** Welches Vektorfeld $K(x, y)$ passt zu dieser Zeichnung?




○ **(A)** $K(x, y) = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$

○ **(B)** $K(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$

○ **(C)** $K(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$

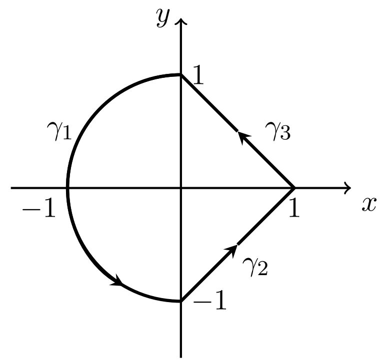
○ **(D)** $K(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$

**b)** Seien $a \in \mathbb{R}$ und $K$ das Vektorfeld mit $K(x, y) = \begin{pmatrix} a \cdot \left(e^{y^2} + xy^2\right) \\ xye^{y^2} + \frac{1}{2}x^2 y \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie $a$ so, dass $K$ konservativ ist.

**Antwort:** $a =$ ____________

**c)** Betrachten Sie die folgende Abbildung.




(i) Welche der folgenden Parametrisierungen passt zur Kurve $\gamma_2 : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ ?

- ○ **(A)** $\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} t-1 \\ t-1 \end{pmatrix}$, $t \in [1,2]$
- ○ **(B)** $\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix}$, $t \in [0,1]$
- ○ **(C)** $\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 1+t \\ t \end{pmatrix}$, $t \in [-1,0]$
- ○ **(D)** $\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ t-1 \end{pmatrix}$, $t \in [0,2]$

(ii) Geben Sie eine Parametrisierung für die Kurve an, welche entsteht, wenn wir $\gamma_1$ in **umgekehrter Richtung** durchlaufen.

**Antwort:** ____________________________________________

**d)** Seien $a \in \mathbb{R}$ und $K$ das Vektorfeld mit $K(x,y) = \begin{pmatrix} 8x + 2xy \\ -y^2 + a \cdot y \end{pmatrix}$.

Sei $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ die Kurve in der $(x,y)$-Ebene, die zusammengesetzt ist aus den Kurven $\gamma_1$, $\gamma_2$ und $\gamma_3$, wie in Teilaufgabe **c)**.

(i) Bestimmen Sie $a$ so, dass der Fluss durch $\gamma$ von Innen nach Aussen gleich Null ist, das heisst

$$\oint_\gamma K \cdot n \, ds = 0.$$

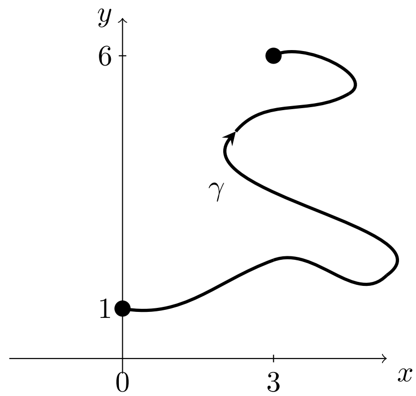
(ii) Bestimmen Sie $a$ so, dass der Fluss durch $\gamma$ von Innen nach Aussen gleich $\pi + 2$ ist, das heisst

$$\oint_\gamma K \cdot n \, ds = \pi + 2.$$

**Bearbeiten Sie Ihre Antwort auf einem separaten Blatt. Zwischenschritte werden bewertet.**

**e)** Sei $K$ das Vektorfeld mit $K(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$.

Sei $\gamma$ eine Kurve in der $(x,y)$-Ebene von $(0,1)$ bis $(3,6)$:




Berechnen Sie die Arbeit $\int_\gamma K \cdot d\gamma$.

**Bearbeiten Sie Ihre Antwort auf einem separaten Blatt. Zwischenschritte werden bewertet.**