Prof. Dr. E. W. Farkas **ETH Zürich, August 2019**

D-BIOL, D-CHAB, D-HEST

Klausur zur Vorlesung Mathematik I/II – Musterlösung

---

1. (a) (*1 Punkte*)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^5+3x^3+2x+1}{3x^5+2x^4+4x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{4+3x^{-2}+2x^{-4}+x^{-5}}{3+2x^{-1}+4x^{-3}+x^{-5}} = \frac{4}{3}$$

(b) (*1 Punkte*)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2(x)}{x\,\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{x\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$$

(c) (*1.5 Punkte*)

$$2x^3-8x^2-2x+8 = 2(x-1)(x+1)(x-4)) \Longrightarrow\ x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 4$$

(d) (*1 Punkte*)

$$f(x) = x^{(x^2)} = e^{(x^2)\ln(x)} \to (f(x))' = e^{(x^2)\ln(x)}(2x\ln(x)+x) = x^{x^2}(2x\ln(x)+x) = x^{x^2+1}(2\ln(x)+1)$$

(e) (*1 Punkte*)

$$\int x\ln(x)\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{4}x^2(2\ln(x)-1) \Longrightarrow \int_1^e x\ln(x)\,dx = \frac{1}{4}(1+e^2)$$

(f) (*1.5 Punkte*)

$$xe^{x^2}+1 = 1+x+x^3+O(x^5) \Longrightarrow a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_2 = 0$$

(g) (*1 Punkte*)

$$z = i(i+2)^3-1 = i(i^3+3\cdot 2i^2+3\cdot 4i+2^3)-1 = i(-i+6i^2+12i+8)-1 = -12+2i \Longrightarrow |z| = \sqrt{148} = 2\sqrt{37}$$

(h) (*1 Punkte*)

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n! \cdot 2^{n+2}}{2^{n+1} \cdot n!(n+1)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2}{(n+1)} \right| = 0$$

(i) (*1 Punkte*)

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x^3-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{3x^3} = \frac{1}{3}; \ \lim_{x\to 1}(1+b\cos(\pi x)) = 1-b$$

$$\Longrightarrow 1-b = \frac{1}{3} \Longleftrightarrow b = \frac{2}{3}$$

(j) (*2 Punkte*)

$$\gamma_1 : t \mapsto \gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad 0 \le t \le 1.$$

$$\gamma_2 : t \mapsto \gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}, \qquad 0 \le t \le 1.$$

$$\gamma_3 : t \mapsto \gamma_3(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ (1-t)^3 \end{pmatrix}, \qquad 0 \le t \le 1.$$

2. (a) (*3 Punkte*)

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -3 & 7 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-1-\lambda)(1-\lambda) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = -1, \ \lambda_3 = 2$$

Es gilt für die Determinante der Matrix:

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

Folglich ist $Rang(A) = 3$.

(b) (*2 Punkte*)

Wir berechnen den Eigenvektor zum Eigenwert -1 aus, indem wir das Gleichungssystem $(A+I)v = 0$ umformen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & 3 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Aus der dritten Zeile folgt $z = t$, mit $t \in \mathbb{R}$. Die zweite Zeile ist äquivalent zu $2y = 0$, folglich ist $y = 0$. Die erste Zeile entspricht $-3x + 3t = 0$, also ist $x = t$. Der Eigenvektor ist somit

$$v = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, \ t \neq 0.$$

(c) (*3 Punkte*)

Wir benutzen zur Berechnung der Inversen das Gauss-Jordan-Verfahren

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

Es folgt

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -3 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

Somit ist

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

(d) (*6 Punkte=(i) 2 Punkte + (ii) 4 Punkte*)

(i) Wir wenden die Regel von Sarrus an:

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = a\cdot 1\cdot 1 + (-1)\cdot 2\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot(-1) - 1\cdot 1\cdot 1 - (-1)\cdot 2\cdot a - 1\cdot 1\cdot(-1) = 3a - 3$$

(ii) Wir bezeichnen mit $(D|c)$ die erweiterte Koeffizientenmatrix.

- Für $a \neq 1$ gilt $Rang(D) = Rang(D|c) = 3$. Dies deckt sich mit der Anzahl der Variablen$\Longrightarrow$ Es gibt nur eine eindeutige Lösung.
- Bei $a = 1$ und $b \neq 0$ gilt $Rang(D) = 2$, aber $Rang(D|c) = 3$, und somit ist hat das system keine Lösung.
- Im Falle $a = 1$ und $b = 0$ sind $Rang(D) = Rang(D|c) = 2$. Dies ist weniger als die Anzahl der Variablen$\Longrightarrow$ unendlich viele Lösungen

(e) (*3 Punkte*) Wir wenden wieder das Gauss-Verfahren an

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right).$$

Aus der letzten Zeile erhalten wir $z = 0$, und folglich setzten wir z in der zweiten Zeile ein, um $y = -3$ zu berechnen. Aus $z = 0$ in der ersten Zeile folgt $x = 1$, und somit ist die Lösungsmenge

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

3. (a) (*5 Punkte*)

Wir stellen die Gleichung um

$$\frac{y'(x)}{y^2(x) - 1} = \frac{1}{x}$$

und erhalten durch die Trennung der Variablen

$$\int \frac{dy}{y^2 - 1} = \int \frac{dx}{x} = \ln(x) + c$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Mithilfe der Partialbruchzerlegung berechnen wir das linke Integral und erhalten

$$\frac{1}{2}(\ln(1-y) - \ln(y+1)) = \ln(x) + c \Rightarrow \ln(\frac{1-y}{1+y}) = 2\ln(x) + c \Rightarrow \frac{1-y}{1+y} = e^c x^2.$$

Umstellen nach y führt zur Lösung

$$y(x) = \frac{1 - e^c x^2}{1 + e^c x^2} = \frac{1 - \tilde{c}x^2}{1 + \tilde{c}x^2}.$$

(b) (*5 Punkte*) Zunächst lösen wir das homogene Gleichungssystem

$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = 0.$$

Hierfür müssen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

ausrechnen. Es gilt

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} \to \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2,$$

voraus die homogene Lösung

$$y_{\mathbf{hom}}(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$$

folgt. Für die Inhomogene Gleichung betrachten wir den Ansatz

$$y_{\mathbf{inh}} = Ax^2 + Bx + C.$$

Einsetzen in die Ausgangsgleichung

$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = 4x^2 + 12x + 6$$

ergibt

$$2A + 6Ax + 3B + 2Ax^2 + 2Bx + C = 4x^2 + 12x + 6,$$

und folglich mit dem Koeffizientenvergleich

$$2A = 4 \Rightarrow A = 2,\ 12{+}2B = 12 \Rightarrow B = 0,\ 4{+}2C = 6 \Rightarrow C = 1 \Longrightarrow y_{\mathbf{inh}}(x) = 2x^2{+}1$$

Die allgemeine Lösung ist somit

$$y(x) = y_{\mathbf{hom}}(x) + y_{\mathbf{inh}}(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x} + 2x^2 + 1.$$

Für das Einsetzen der Nebenbedingungen brauchen wir zunächst die Ableitung der allgemeinen Lösung

$$y'(x) = -2c_1 e^{-2x} - c_2 e^{-x} + 4x.$$

Einsetzen ergibt

$$\begin{cases} 0 = y(0) = c_1 + c_2 + 1 \\ 1 = y'(0) = -2c_1 - c_2. \end{cases} \tag{1}$$

Das addieren der beiden Gleichungen ergibt $c_1 = 0$ und folglich $c_2 = -1$.
Die Lösung der Differentialgleichung ist somit

$$y(x) = 2x^2 - e^{-x} + 1$$

(c) (*2 Punkte*) Es gilt

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - e^{-x} + 1}{x^2} = \lim_{x \to \infty} (2 - x^{-2} e^{-x} + x^{-2}) = 2$$

(d) (*3 Punkte*) Zunächst lösen wir die homogene Gleichung und erhalten

$$y'(x) = y(x) \Rightarrow y(x) = Ke^x, \;\; K \in \mathbb{R}.$$

Nach der Methode der Variation der Konstanten setzen wir

$$y(x) = K(x)e^x$$

in die Ausgangsgleichung ein und erhalten

$$K'(x)e^x + K(x)e^x - K(x)e^x = e^{2x} + e^x \Rightarrow K'(x) = e^x + 1 \Rightarrow K(x) = e^x + x + c.$$

Folglich ist die Lösung gegeben als

$$y(x) = K(x)e^x = e^{2x} + xe^x + ce^x$$

4. (a) (*4 Punkte*)

Als ersten Schritt setzen wir den Gradienten gleich Null und berechnen die kritischen Punkte

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x - 2y \\ 4y - 2x + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aus der ersten Zeile folgt $y = x$, woraus wir $4x - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$ und $y = -\frac{1}{2}$ folgern. Durch wiederholtes ableiten erhalten wir

$$f_{xx}(x,y) = -2, \;\; f_{yy}(x,y) = 4, \;\; f_{xy}(x,y) = \;\; f_{yx}(x,y) = -2.$$

Nun gilt

$$D(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - (f_{xy}(x,y))^2 = 2 \cdot 4 - 4 = 4 > 0$$

Da $f_{xx}(x,y) > 0$ ist, wissen wir, dass der kritische Punkt $P = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ ein relatives Minimum ist.

(b) (*4 Punkte*)

Wir schreiben $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$, wobei die Nebenbedingung als $g(x) = 0$ aufgefasst wird. Wir benutzen nun die Lagrange-Multiplikatoren-Methode. Dass heisst, wir berechnen

$$\nabla f = \lambda \nabla g \to \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda x \\ 2\lambda y \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$x = y = \frac{1}{\lambda},$$

und zusammen mit der Nebenbedingung erhalten wir

$$\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 1 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}.$$

Hieraus erhalten wir zwei verschiedene Punkte

$$P_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}),\ P_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}).$$

Einsetzen in f ergibt

$$f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = 2\sqrt{2},\ f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = -2\sqrt{2}$$

somit haben wir in P_1 ein Maximum und in P_2 ein Minimum.

(c) (*4 Punkte=(i) 1 Punkt+(ii) 3 Punkte*

(i)) Wir setzten $y = 0$ in die Gleichung ein und erhalten

$$x = x^2 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1$$

(ii) Wir wenden den Satz der impliziten Funktionen auf die Funktion $F(x, y) = x + ye^y - x^2$ an, und erhalten

$$y'(x) = \frac{-\partial_x F(x, y)}{\partial_y F(x, y)} = \frac{-(1 - 2x)}{ye^y + e^y}.$$

Einsetzen der Punkte $(0, 0),\ (1, 0)$ ergibt

$$y'(0) = \frac{-1}{1} = 1,\ y'(1) = \frac{1}{1} = 1.$$

5. (a) (*3 Punkte*) Wir benutzen Polarkoordinaten und erhalten

$$\iint_B \frac{dxdy}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \int_1^2 \frac{1}{r^2} \cdot rdrd\varphi = \int_0^{2\pi} \int_1^2 \frac{1}{r} drd\varphi = \int_0^{2\pi} \ln(2)d\varphi = 2\pi \ln(2)$$

(b) (*4 Punkte*)

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^x \int_{z=0}^{x^2} \frac{xyz}{1 + x^8} dzdydx &= \frac{1}{2} \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^x \frac{xyx^4}{1 + x^8} dydx = \frac{1}{2} \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^x \frac{x^5 y}{1 + x^8} dydx \\ &= \frac{1}{4} \int_{x=0}^1 \frac{x^5 x^2}{1 + x^8} = \frac{1}{4} \int_{x=0}^1 \frac{x^7}{1 + x^8} dx \end{aligned}$$

Das letzte Integral vereinfachen wir mithilfe der Substitution

$$w = 1 + x^8 \Rightarrow dw = 8x^7 dx \Leftrightarrow \frac{1}{8x^7} dw = dx,$$

welche wir in das Integral einsetzen

$$\frac{1}{32} \int_1^2 \frac{1}{w} dw = \frac{\ln(2)}{32}.$$

6. (a) (*2 Punkte*) Mögliche Parametrisierungen sind

$$\gamma_2 : \qquad t \mapsto \gamma_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ -\frac{2b}{\pi} t - b \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad -\tfrac{\pi}{2} \leq t \leq 0$$

$$\gamma_3 : \qquad t \mapsto \gamma_3(t) = \begin{pmatrix} t \\ b\left(\frac{4}{\pi^2} t^2 - 1\right) \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad 0 \leq t \leq \tfrac{\pi}{2}.$$

(b) (*3 Punkte*) Einsetzen des Ortsvektors von γ_1 in das Vektorfeld $\overrightarrow{F}$ ergibt:

$$\overrightarrow{F}(\gamma_1(t)) = \begin{pmatrix} \cos^2(t) \\ -3t \end{pmatrix}$$

Die Ableitung des Ortsvektors der Kurve γ_1 wird mit diesem $\overrightarrow{F}$ skalarmultipliziert:

$$\dot{\gamma}_1(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2\sin(t)\cos(t) \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \overrightarrow{F} \cdot \dot{\gamma}_1 = -\cos^2(t) + 6t\sin(t)\cos(t).$$

Wir integrieren nun in den passenden Grenzen:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(-\cos^2(t) + 6t\sin(t)\cos(t)\right) dt \\
&= -\frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos(2t)) dt + 3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t\sin(2t) dt \\
&= -\frac{\pi}{2} - \underbrace{\frac{1}{4} \left[\sin(2t)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \frac{3}{2} \left[t\cos(2t)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2t) dt \\
&= -\frac{\pi}{2} - 2\frac{3}{2}\frac{\pi}{2}\cos(\pi) + \underbrace{\frac{3}{4} \left[\sin(2t)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} = \pi.
\end{aligned}$$

(c) (*4 Punkte*) Wir betrachten die von der aus γ_1, γ_2 und γ_3 zusammengesetzten geschlossene Kurve γ. Mit

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 3x \end{pmatrix}$$

und der Formel von Green folgt:

$$\oint_\gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \iint_A \left(\frac{\partial}{\partial x} Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} P(x,y) \right) dA,$$

mit A dem von γ eingeschlossenen Gebiet. In unserem Fall ist:

$$\frac{\partial}{\partial x} Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} P(x,y) = 3 - 1 = 2,$$

also gilt:

$$\oint_\gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_A 2dA = 2|A|.$$

Die Gesamtfläche A setzt sich zusammen aus der Fläche des Dreiecks mit Eckpunkten $(0,0), (-\frac{\pi}{2}, 0), (-b, 0)$, die $\frac{\pi b}{4}$ beträgt, sowie zwei Integralen:

$$\begin{aligned} |A| &= \frac{\pi b}{4} + \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt}_{= \frac{\pi}{2}, \text{ siehe (b)}} + \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} b \left(\frac{4}{\pi^2} t^2 - 1 \right) dt \right| \\ &= \frac{\pi b}{4} + \frac{\pi}{2} + b \left| \left[\frac{4t^3}{3\pi^2} - t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right| \\ &= \frac{\pi b}{4} + \frac{\pi b}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{7\pi b}{12}. \end{aligned}$$

Nun fordern wir:

$$2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{7\pi b}{12} \right) = \int_{\gamma_1} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} + \int_{\gamma_2} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} + \int_{\gamma_3} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} \stackrel{!}{=} \pi + 10$$

$$\Rightarrow \qquad b = \frac{60}{7\pi}.$$