Prof. Dr. E. W. Farkas **ETH Zürich, August 2019**

D–BIOL, D–CHAB, D–HEST

Klausur zur Vorlesung Mathematik I/II

Bitte ausfüllen!

Name:	
Vorname:	
Legi-Nr.:	

Bitte nicht ausfüllen!

Aufgabe	Punkte	Kontrolle	Max
1			12
2			17
3			15
4			12
5			7
6 $(*)$			9 $(*)$
Total			63

Die maximal erreichbare Punktzahl ist 63. Aufgabe 6 ist eine **Bonusaufgabe** mit 9 **Zusatzpunkten**.

Bitte wenden!

Hinweise zur Klausur

Prüfungsdauer: 3 Stunden.

Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten mit persönlichen, von Hand geschriebenen Notizen. Keine (Taschen-)Rechner. Wörterbuch.

Bitte beachten Sie folgende Punkte:

- Tragen Sie **jetzt** Ihren Namen in das Deckblatt ein und geben Sie es **am Ende** der Prüfung als vorderstes Blatt Ihrer Arbeit ab.
- Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- Begründen Sie Ihre Lösungen. Dabei können bekannte Formeln aus der Vorlesung und den Übungen ohne Herleitung verwendet werden.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift, rotem oder grünem Kugelschreiber.
- Die Reihenfolge der Bearbeitung der Aufgaben ist Ihnen freigestellt.
- Wir erwarten nicht, dass Sie alle Aufgaben lösen. Tun Sie einfach Ihr Bestes! Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet.
- **Am Ende der Prüfung**
  1. Ordnen Sie Ihre zusätzlichen Lösungsblätter nach Aufgaben.
  2. Legen Sie diese zusammen mit Ihrer Prüfung an oberster Stelle in den bereitliegenden Umschlag. Dieser wird am Ende eingesammelt. Bitte beschriften oder verschliessen Sie den Umschlag **nicht**.

Viel Erfolg!

Siehe nächstes Blatt!

Aufgaben

---

1. (*12 Punkte*) Die Antworten in Teilaufgaben **1.a)** bis **1.j)** müssen Sie **nicht** begründen. Schreiben Sie die Antworten zu diesen Teilaufgaben **vollständig gekürzt und vereinfacht** direkt auf das Aufgabenblatt. Antworten zu diesen Teilaufgaben auf anderen Blättern werden nicht bewertet.

a) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^5+3x^3+2x+1}{3x^5+2x^4+4x^2+1} = \underline{\hspace{3cm}}.$$

b) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2(x)}{x\,\sin(x)} = \underline{\hspace{3cm}}.$$

c) Geben Sie alle Nullstellen von $2x^3-8x^2-2x+8$ an: $\underline{\hspace{7cm}}$.

d) Sei f die Funktion mit $f(x) = x^{(x^2)}$ und $x > 0$. Bestimmen Sie die Ableitung

$$f'(x) = \underline{\hspace{8cm}}.$$

e) Berechnen Sie das Integral

$$\int_1^e x\ln(x)\,dx = \underline{\hspace{7cm}}.$$

f) Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ die Taylorreihe der Funktion

$$f(x) = xe^{x^2} + 1$$

(im Punkt $x_0 = 0$). Bestimmen Sie $a_0 = \underline{\hspace{2cm}}$; $a_1 = \underline{\hspace{2cm}}$; $a_2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

g) Bestimmen Sie den Betrag der komplexen Zahl $z = i(i+2)^3 - 1$

$$|z| = \underline{\hspace{3cm}}.$$

h) Gegeben sei die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2^{n+1}} x^n.$$

Bestimmen Sie den Konvergenzradius r.

$$r = \underline{\hspace{3cm}}.$$

Bitte wenden!

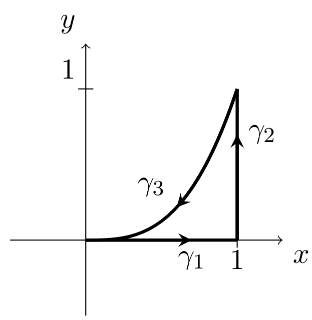
i) Seien $b \in \mathbb{R}$ und sei die Funktion f gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x)}{x^3 - 1} & \text{für } x > 1 \\ 1 + b\cos(\pi x) & \text{für } x \leq 1. \end{cases}$$

Wie muss b gewählt werden, damit die Funktion f an der Stelle $x = 1$ stetig ist?

$$b = \underline{\hspace{3cm}}.$$

j) Geben Sie die Parametrisierungen von γ_1, γ_2 und γ_3 an. Hierbei sind γ_1 und γ_2 geradlinig, γ_3 folgt dem Verlauf des Graphen der Funktion $x \mapsto x^3$ auf dem Intervall $[0, 1]$.



$$\gamma_1 : t \mapsto \gamma_1(t) = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}, \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

$$\gamma_2 : t \mapsto \gamma_2(t) = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}, \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

$$\gamma_3 : t \mapsto \gamma_3(t) = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}, \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

2. (*17 Punkte*) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und den Rang von A.

(b) Geben Sie zum Eigenwert $\lambda_1 = -1$ von A einen Eigenvektor an.

(c) Berechnen Sie die Inverse der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Siehe nächstes Blatt!

(d) Gegeben sei die Matrix

$$D = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

und der Vektor

$$c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix},$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$.

(i) Berechnen Sie die Determinante von D in Abhängigkeit von a.

(ii) Für welche Werte von a und b hat das Gleichungssystem

$$Dx = c$$

- genau eine Lösung?
- keine Lösung?
- unendlich viele Lösungen?

(e) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{cases} -x + z = -1 \\ -2x - y + 5z = 1 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$$

3. (*15 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y'(x) = \frac{y^2(x) - 1}{x} \tag{1}$$

mithilfe der Trennung der Variablen.

(b) Man bestimme die Lösung des Anfangswertproblems 2. Ordnung

$$\begin{cases} y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = 4x^2 + 12x + 6 \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases} \tag{2}$$

(c) Bestimmen Sie für die Lösung y von (2) das Verhalten von $\frac{y(x)}{x^2}$ für $x \to \infty$.

(d) Man betrachte nun die inhomogene Differentialgleichung

$$y'(x) - y(x) = e^{2x} + e^x. \tag{3}$$

Finden Sie die allgemeine Lösung von (3) mithilfe der Variation der Konstanten.

Bitte wenden!

4. (*12 Punkte*)

(a) Man bestimme die kritischen Punkte der Funktion

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2xy + y,$$

und gebe jeweils an, ob es sich um ein lokales Minimum, lokales Maximum oder um einen Sattelpunkt handelt.

(b) Man bestimme die Extremwerte der Funktion

$$f(x,y) = 2x + 2y$$

unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$ und die Stellen, an denen diese jeweils angenommen werden.

(c) Die Funktion y ist implizit gegeben durch

$$x + ye^y = x^2.$$

(i) Es gibt zwei Werte $x \in \mathbb{R}$, für die gilt $y(x) = 0$. Finden Sie diese Werte.

(ii) Seien x_1 und x_2 die Werte aus (i). Berechnen Sie jeweils die Steigung von y bei x_1 und x_2.

5. (*7 Punkte*)

(a) Sei $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. Bestimmen Sie

$$\iint_B \frac{1}{x^2+y^2} dxdy.$$

Hinweis: Verwenden Sie Polarkoordinaten.

(b) Man bestimme den Wert des Dreifachintegrals

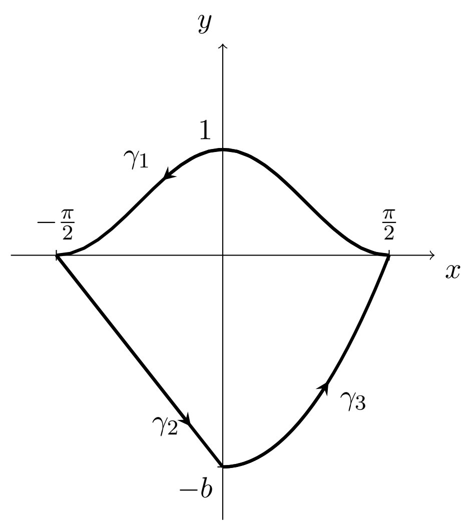
$$\int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x} \int_{z=0}^{x^2} \frac{xyz}{1+x^8} dzdydx.$$

6. **(*)** (*9 Zusatzpunkte*) Das Vektorfeld $\overrightarrow{F}$ sei gegeben durch

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ 3x \end{pmatrix}.$$

Weiterhin betrachten wir die Kurven γ_1, γ_2 und γ_3 in der nachstehenden Abbildung. Die Kurve γ_1 entspricht dem Graphen der Funktion $x \mapsto \cos^2(x)$ auf dem Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, die Kurve γ_2 verbindet die Punkte $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ und $(0, -b)$ geradlinig, wobei $b > 0$. Die Kurve γ_3 entspricht einem Parabelast durch die Punkte $(0, -b)$ und $(\frac{\pi}{2}, 0)$.

Siehe nächstes Blatt!



(a) Ergänzen für γ_2 und γ_3 eine Parametrisierung wie diejenige für γ_1. Berücksichtigen Sie dabei die Durchlaufrichtung. Schreiben Sie Ihre Antwort direkt **auf das Aufgabenblatt**.

$$\gamma_1 : t \mapsto \gamma_1(t) = \begin{pmatrix} -t \\ \cos^2(t) \end{pmatrix}, \qquad -\tfrac{\pi}{2} \le t \le \tfrac{\pi}{2}.$$

$$\gamma_2 : t \mapsto \gamma_2(t) = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}, \qquad \underline{\qquad\quad} \le t \le \underline{\qquad\quad}.$$

$$\gamma_3 : t \mapsto \gamma_3(t) = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}, \qquad \underline{\qquad\quad} \le t \le \underline{\qquad\quad}.$$

(b) Berechnen Sie das Kurvenintegral von F längs γ_1, also

$$\int_{\gamma_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}.$$

Hinweis: Folgende trigonometrische Identitäten können hilfreich sein:

$$\cos^2(u) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2u)),$$
$$2\sin(u)\cos(u) = \sin(2u).$$

(c) Bestimmen Sie $b > 0$ so, dass

$$\int_{\gamma_2} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} + \int_{\gamma_3} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 10.$$

Hinweis: Betrachten Sie die aus γ_1, γ_2 und γ_3 zusammengesetzte geschlossene Kurve γ und wenden Sie die Formel von Green an.