D–BIOL D–CHAB D–HEST

Lösung Mathematik I & II Aug. 2020

1. (*12 Punkte*)

(a) (i.) Zuerst schreiben wir mit den Logarithmusgesetzen

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\ln(x) - \ln(2x) \\ &= 2\ln(x) - (\ln(2) + \ln(x)) \\ &= 2\ln(x) - \ln(2) - \ln(x) \\ &= \ln(x) - \ln(2) \end{aligned}$$

damit berechnen wir dann

$$f'(x) = \frac{1}{x}.$$

Alternativ ergibt sich dies auch mit der Kettenregel.

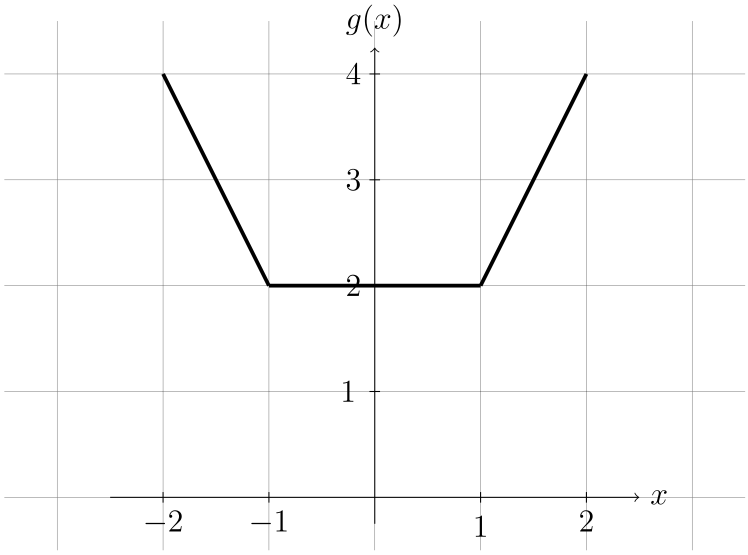
(ii.) Hier kann die Regel von l'Hospital benutzt werden, denn sowohl Zähler wie auch Nenner konvergieren gegen 0,

$$\lim_{x\to 2} \ln(x^2) - \ln(2x) = \lim_{x\to 2} \ln(x) - \ln(2) = 0, \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to 2} x - 2 = 0.$$

Damit berechnen wir unter Verwendung des ersten Teils

$$\lim_{x\to 2} \frac{\ln(x^2) - \ln(2x)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{1/x}{1} = \frac{1}{2}$$

(b) (i.) Der Graph von g auf $[-2, 2]$ sieht wie folgt aus.



(ii.) Die Funktion g is in den Punkten $\{-1, 1\}$ nicht differenzierbar. In allen anderen Punkten schon.

(c) Wir berechnen zuerst die Ableitungen von k. Es sind

$$\begin{aligned} k'(x) &= -2xe^{-x^2} \\ k''(x) &= -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}. \end{aligned}$$

An der Stelle $x_0 = 0$ ist somit

$$\begin{aligned} k(0) &= 1 \\ k'(0) &= 0 \\ k''(0) &= -2. \end{aligned}$$

(i.) Allgemein ist das Taylor-Polynom zweiter Ordnung an der Stelle $x_0 = 0$ gegeben durch $T_2(x) = k(x_0) + k'(x_0)x + \frac{1}{2}k''(x_0)x^2$ und damit ist

$$a_2 = \frac{1}{2}k''(0) = -1.$$

Die richtige Antwort ist also

○ $a_2 = -2$

✗ $a_2 = -1$

○ $a_2 = \frac{1}{2}$

○ $a_2 = 2$

(ii.) Das Taylor-Polynom erster Ordnung ist $T_1(x) = k(x_0) + k'(x_0)x$, wodurch sich zusammen mit der Berechnung oben ergibt, dass $T_1(x) = k(x_0) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Somit

○ $T_1(2) = 2$

✗ $T_1(2) = 1$

○ $T_1(2) = -1$

○ $T_1(2) = -2$

(d) (i.) Wir müssen die Fixpunktgleichung $x = h(x)$ lösen. Diese lässt sich schreiben, als

$$0 = x \cdot (1 - e^{-3(x-1)}).$$

Diese ist erfüllt, wenn einer der Faktoren null ist. Den ersten Fixpunkt finden wir sofort, nämlich

$$\widetilde{x}_1 = 0.$$

Für den zweiten Fixpunkt ist somit $\widetilde{x}_2 \neq 0$ und folglich muss $0 = 1 - e^{-3(\widetilde{x}_2 - 1)}$ gelten. Also $3(\widetilde{x}_2 - 1) = 0$ und deshalb ist

$$\widetilde{x}_2 = 1.$$

(ii.) Ein Fixpunkt von h ist genau dann attraktiv, wenn $|h'(x)| < 1$. Diese Bedingung gilt es zu überprüfen. Dazu berechnen wir die Ableitung

$$h'(x) = e^{-3(x-1)} - 3xe^{-3(x-1)}.$$

Nun folgt aus der Berechnung

$$\begin{aligned} |h'(\widetilde{x}_1)| &= |e^3| > 1 \\ |h'(\widetilde{x}_2)| &= |e^0 - 3e^0| = 2 > 1, \end{aligned}$$

dass keiner der Fixpunkte attraktiv ist.

(e) Durch Substitution $u(x) = e^x + 1$ und $du(x) = e^x dx$ berechnen wir

$$\int \frac{e^x}{e^x+1} = \int \frac{1}{u}\,du = \ln(u) + c = \ln(e^x+1) + c.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln(7)} \frac{e^x}{e^x+1} &= \Big[\ln(e^x+1)\Big|_0^{\ln(7)} = \ln\Big(e^{\ln(7)}+1\Big) - \ln\Big(e^0+1\Big) \\ &= \ln\big(8\big) - \ln\big(2\big) = \ln\left(\frac{8}{2}\right) \end{aligned}$$

und somit

$$B = 4.$$

2. (*14 Punkte*)

(a) Durch Multiplikation des Zählers und Nenners mit $(1+i)$ erhalten wir

$$z_1 = \frac{4}{i-1} = \frac{4}{i-1}\frac{i+1}{i+1} = -\frac{4+4i}{2} = -2-2i$$

und somit

$$\mathrm{Re}(z_1) = -2 \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Im}(z_1) = -2.$$

(b) (i.) Wir schreiben zuerst $\tilde{z}_2 = -\sqrt{3}+i$ in Polarkoordinaten um. Die Länge berechnet man mit

$$|\tilde{z}_2| = \sqrt{3+1} = 2.$$

Damit ist

$$\tilde{z}_2 = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$$

für $\varphi = \arg(\tilde{z}_2) = \frac{5}{6}\pi$. Nun ist die Berechnung der Potenz einfach, denn

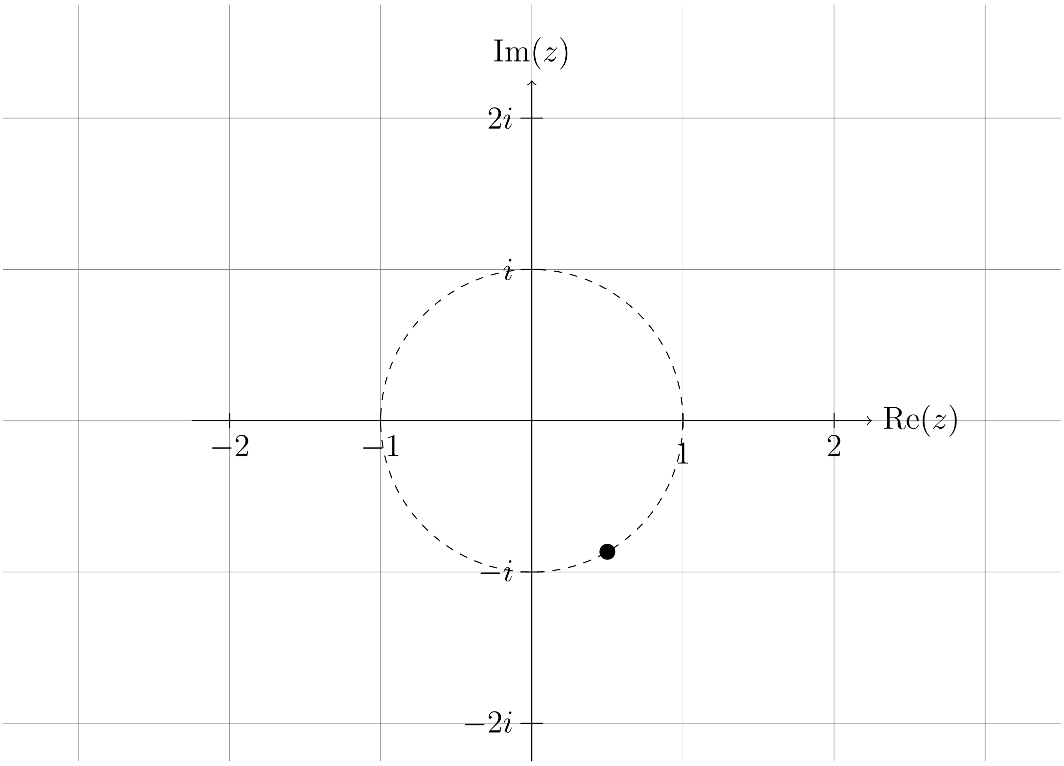
$$z_2 = \tilde{z}_2^2 = 2^2\left(\cos\left(2\frac{5}{6}\pi\right) + i\sin\left(2\frac{5}{6}\pi\right)\right) = 4\left(\cos\left(-\frac{1}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{1}{3}\pi\right)\right)$$

also

$$r = 4 \qquad \text{und} \qquad \varphi = -\frac{1}{3}\pi.$$

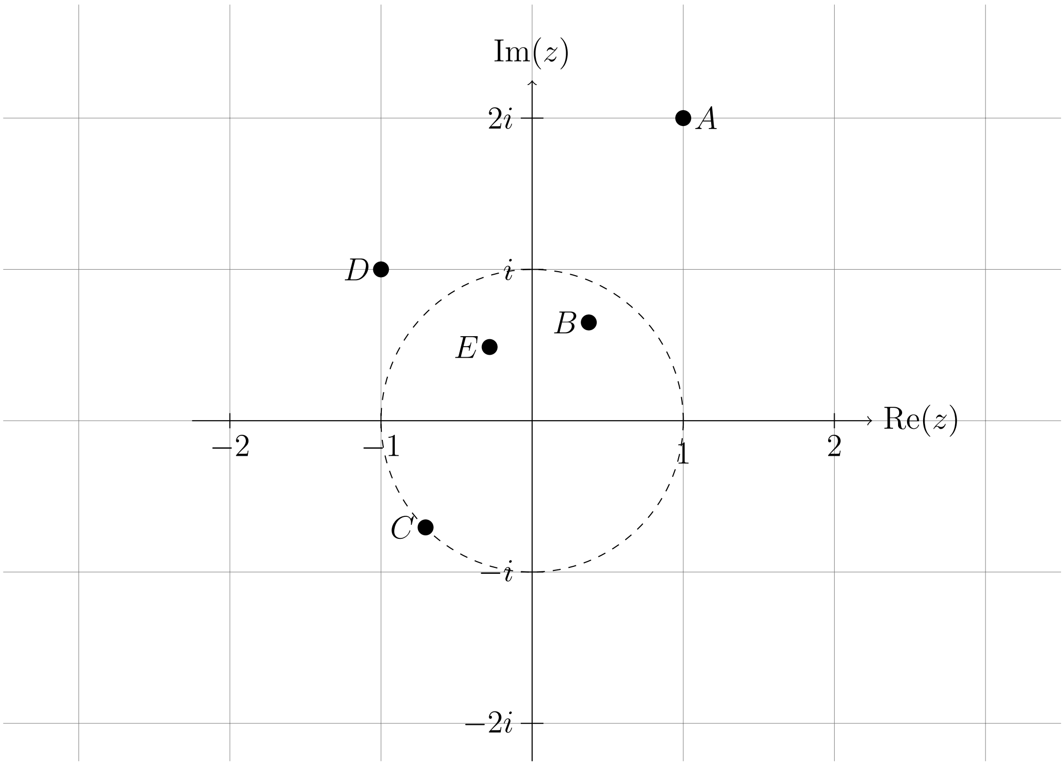
(ii.) Durch Normierung erhalten wir eine Zahl auf dem Einheitskreis. Einzuzeichnen ist damit der Punkt

$$\left(\cos\left(-\frac{1}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{1}{3}\pi\right)\right),$$



(c) Durch Ausschluss der offensichtlich falschen Antworten findet man

- ○ $D^3 = A$
- ⊗ $B^2 = E$
- ○ $\overline{C}^2 = D$
- ○ $A^2 = C$



(d) Wir lesen zuerst die Koordinaten des Vektors in der Abbildung ab, diese sind

$$A \cdot v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt es das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ -1 & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

zu lösen. Dieses lässt sich schreiben als

$$\begin{aligned} 0 + b &= 1 \\ -2 + d &= -2 \end{aligned}$$

womit folgt $b = 1$ und $d = 0$, also

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(e) Gegeben sei die Matrix $D_b = \begin{pmatrix} 4 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ mit $b \in \mathbb{R}$.

(i) Die Determinante in Abhängigkeit von b ist

$$\det(D_b) = 8 + b.$$

(ii) Das Gleichungssystem $D_b \cdot x = 0$ hat unendlich viele Lösungen genau dann, wenn $\det(D_b) = 0$. Folglich

$$b = -8.$$

(iii) Die Eigenwerte sind Lösungen des charakteristischen Polynoms

$$\det(D_b - \lambda \cdot E_3) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 8 + b) = 0.$$

Offensichtlich ist $\lambda_1 = 1$ ein Eigenwert und dieser ist immer reell. Die anderen Eigenwerte findet man mittels der Lösungsformel für quadratische Gleichungen. Damit ist

$$\lambda_{2,3} = 3 \pm \sqrt{9 - (8+b)} = 3 \pm \sqrt{1-b}.$$

Um komplexe Eigenwerte, die nicht reell sind, zu erhalten, muss der Ausdruck unter der Wurzel negativ sein, also

○ $b = -1$	○ $b = 1$
○ $b = 0$	☒ $b = 2$

Das Produkt der Eigenwerte ist $1 \cdot (3 + \sqrt{1-b}) \cdot (3 - \sqrt{1-b}) = \det(D_b) = 8 + b$. Damit ist das Produkt der Eigenwerte eine Quadratzahl für

○ $b = 0$	○ $b = 2$
☒ $b = 1$	○ $b = 4$

Damit $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ ein Eigenvektor ist, muss er die Bedingung

$$D_b = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 0 & b \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 0$$

erfüllen. Aus der zweiten Zeile folgt $1 - \lambda = 0$. Damit kann dies nur ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ sein. Aus der ersten Zeile ergibt sich dann die Gleichung

$$4 - \lambda_1 + b = 3 + b = 0$$

also

☒ $b = -3$	○ $b = 1$
○ $b = -1$	○ $b = 3$

(f) Mit der Berechnung

$$v_1 = A \cdot v_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 64 \\ 96 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 32 \\ 48 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} v_0$$

finden wir den zugehörigen Eigenwert $\lambda = \frac{1}{2}$. Nun ist

$$v_n = A^n v_0 = \lambda^n v_0$$

also

$$v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \begin{pmatrix} 0 \\ 64 \\ 96 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

3. (*12 Punkte*)

(a) i. Im stationären Zustand gilt $y'_\infty = 0$. Des Weiteren folgt aus der Abbildung, dass $y_\infty = 4$, und damit

$$y'_\infty = 0 = a \cdot y_\infty + 2 = a \cdot 4 + 2,$$

also $a = -\frac{1}{2}$.

ii. *Rechnung unter Benutzung der obigen Lösung:* Aus dem ersten Teil haben wir

$$y'(x) = -\frac{1}{2}y(x) + 2.$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist gegeben durch

$$y(x) = C \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + 4$$

zusammen mit dem Anfangswert $y(0) = 0$ folgt $C = -4$, und somit

$$y(x) = -4 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + 4.$$

Durch einsetzen folgt nun

$$y(\ln(4)) = -4e^{-\frac{1}{2}\ln(4)} + 4 = -4e^{-\ln(2)} + 4 = 2.$$

Rechnung unter Benutzung des Hinweises: Wählen wir stattdessen $a = 2$ bekommen wir die allgemeine Lösung

$$y(x) = C \cdot e^{2x} - 1$$

zusammen mit dem Anfangswert $y(0) = 0$ folgt $C = 1$, und somit

$$y(x) = 2 \cdot e^{2x} - 1.$$

Durch einsetzen erhält man

$$y(\ln(4)) = e^{2\ln(4)} - 1 = e^{\ln(16)} - 1 = 16 - 1 = 15.$$

(b) Die stationären Punkte der DGL

$$y'(x) = (y(x) + 3)(y(x) - 2)(y(x) - 5)$$

sind

$$y_{\infty,1} = -3, \qquad y_{\infty,2} = 2, \qquad y_{\infty,3} = 5.$$

Damit muss für den Anfangswert $y(0) = 1$ gelten, dass $y_\infty \in \{-3, 2\}$. Nun ist aber für diesen Anfangswert und alle $x \geq 0$ wegen der Zeichen der einzelnen Klammern $y'(x) > 0$, somit ist die Lösungskurve monoton steigend und

○ $\lim_{x\to\infty} y(x) = +\infty$. ☒ $\lim_{x\to\infty} y(x) = 2$.

○ $\lim_{x\to\infty} y(x) = -3$. ○ $\lim_{x\to\infty} y(x) = 5$.

(c) (i.) Der homogene Teil der Differentialgleichung

$$y'(x) - (x^2+2)y(x) = e^{\frac{1}{3}x^3}.$$

ist gegeben durch

$$y_h'(x) - (x^2+2)y_h(x) = 0.$$

Die allgemeine Lösung lautet dann

$$y_h(x) = e^{\frac{1}{3}x^3+2x+C} = \tilde{C} \cdot e^{\frac{1}{3}x^3+2x} \qquad \text{mit } \tilde{C} \in \mathbb{R}.$$

(ii.) Wir verfolgen den Ansatz $y(x) = C(x) \cdot e^{\frac{1}{3}x^3+2x}$. Durch einmaliges Ableiten erhalten wir

$$y'(x) = C'(x) \cdot e^{\frac{1}{3}x^3+2x} + (x^2+2) \cdot y(x).$$

Vergleich mit der ursprünglichen Gleichung liefert dann

$$C'(x) \cdot e^{\frac{1}{3}x^3+2x} = e^{\frac{1}{3}x^3}$$

also

$$C(x) = -\frac{1}{2} \cdot e^{-2x} + k.$$

Einsetzen in unseren Ansatz ergibt

$$\begin{aligned} y_s(x) &= \left(-\frac{1}{2} \cdot e^{-2x} + k\right) \cdot e^{\frac{1}{3}x^3+2x} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{3}x^3} + k \cdot e^{\frac{1}{3}x^3+2x} \qquad \text{mit } k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(d) Wir betrachten die DGL zweiter Ordnung $y''(x) - 6y'(x) + 5y(x) = 0$. Die Charakteristische Gleichung ist

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = (5-\lambda)(1-\lambda) = 0.$$

Also

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{5x} \qquad \text{mit } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

(e) Für die Benutzung der allgemeinen Lösungsformel benötigen wir die Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren.

Berechnen wir zuerst die Eigenwerte der Matrix A. Ihr Charakteristisches Polynom ist $\det(A - \lambda E_2) = (2-\lambda)(4-\lambda) - 3 = \lambda^2 - 6\lambda + 5$, genau wie in Aufgabenteil (d). Die Eigenwerte sind folglich $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 5$. Beachte: Diese Eigenwerte sind voneinander verschieden.

Berechnen wir nun die Eigenvektoren zu λ_1. Hierzu müssen wir das Gleichungssystem $(A - E_2) \cdot v_1 = 0$ lösen. Explizit erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda_1 & 1 \\ 3 & 4-\lambda 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \end{pmatrix} = 0.$$

Die Eigenvektoren sind damit

$$v^1 = t_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{für } t_1 \in \mathbb{R}.$$

Berechnen wir nun die Eigenvektoren zu λ_2. Es gilt das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda_2 & 1 \\ 3 & 4-\lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1^2 \\ v_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1^2 \\ v_2^2 \end{pmatrix} = 0$$

zu lösen. Die Eigenvektoren sind also

$$v^2 = t_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{für } t_2 \in \mathbb{R}.$$

Letztlich benutzen wir die allgemeine Lösungsformel und erhalten damit

$$y(x) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^x + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{5x} \qquad \text{mit } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

4. (*10 Punkte*)

(a) (i.) Der Gradient der Funktion $f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + 2xy - 8x - y^2$ berechnet sich als

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + 2y - 8 \\ 2x - 2y \end{pmatrix}.$$

Kritische Punkte sind genau diejenigen, für die gilt $\nabla f(x,y) = 0$. Somit muss das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + 2y - 8 \\ 0 &= 2x - 2y \end{aligned}$$

erfüllt sein. Aus der zweiten Gleichung folgt $y = x$ und damit gilt aus der ersten Gleichung für x, dass

$$x^2 + 2x - 8 = (x-2)(x+4) = 0.$$

Die kritischen Punkte sind folglich

$$(x_1, y_1) = (2,2) \qquad \text{und} \qquad (x_2, y_2) = (-4,-4).$$

(ii.) Laut Definition der Tangentialebene wählen wir $a = f_x(0,-1)$, $b = f_y(0,-1)$ und $c = f(0,-1)$. Damit ist dann

$$a = -10 \qquad b = 2 \qquad c = -1$$

und $l(x,y) = -1 - 10x + 2(y+1)$.

(b) (i.) Setzen wir in die Gleichung für die Höhenlinie $g(x,y) = 2$ die Punkte $(0,y)$ ein, so erhalten wir $y^2 - 7 = 2$. Somit sind die gesuchten Punkte diejenigen die die Gleichung $y^2 = 9$ erfüllen. Somit $y = 3$ und $y = -3$.

(ii.) Wir nutzen den Satz über implizite Differentiation. Dazu bemerken wir zuerst, dass der Punkt $(x,y) = (1,2)$ tatsächlich auf der Niveaukurve 0 liegt, denn $2^2 - 1 + 2^2 \cdot 1 - 7 = 0$. Nun ist die Steigung gegeben durch

$$-\frac{g_x}{g_y} = -\frac{-3x^2 + y^2}{2y + 2yx},$$

evaluiert an der Stelle $(1,2)$. Deshalb

- ○ -8
- ☒ $-\frac{1}{8}$
- ○ $\frac{1}{8}$
- ○ 8

(c) (i.) Das Gebiet P wird zusammen mit dem Hinweis parametrisiert durch

$$\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x,y) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \text{ mit } r \in [0,1],\ \varphi \in \left[\frac{1}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\right] \right\}.$$

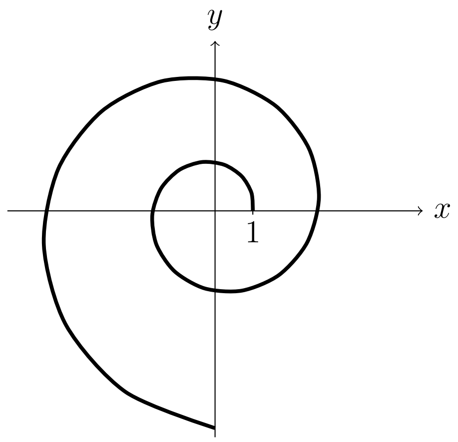
(ii.) Zusammen mit der Parametrisierung aus dem ersten Aufgabenteil erhalten wir

$$\begin{aligned}
\iint_P (2+x+y)\,dA &= \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{7}{4}\pi} \int_0^1 \big(2 + r\cos(\varphi) + r\sin(\varphi)\big) r\,dr\,d\varphi \\
&= 2\int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{7}{4}\pi} \int_0^1 r\,dr\,d\varphi + \int_0^1 r^2\,dr \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{7}{4}\pi} \cos(\varphi) + \sin(\varphi)\,d\varphi \\
&= \frac{3}{2}\pi + \frac{1}{3}\left(\int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{7}{4}\pi} \cos(\varphi) + \sin(\varphi)\,d\varphi \right) \\
&= \frac{3}{2}\pi + \frac{1}{3}\left(\sin\left(\frac{7}{4}\pi\right) - \sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)\right) - \frac{1}{3}\left(\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) - \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)\right) \\
&= \frac{3}{2}\pi - \frac{\sqrt{2}}{3}.
\end{aligned}$$

5. (*12 Punkte*)

(a) Sei $\gamma(t) = \big(e^t \cos(t), e^t \sin(t)\big)$

(i.) Für welches Intervall I erhalten wir mit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \gamma(t)$ die abgebildete Kurven unten? Dabei starten die Kurve auf der x-Achse und endet auf der y-Achse.



- ○ $[0, 6\pi]$
- ☒ $\left[0, \frac{7\pi}{2}\right]$
- ○ $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$
- ○ $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

(ii.) Hierfür müssen wir

$$\int_0^\pi |\gamma'(t)| dt$$

berechnen. Beginnen wir also mit der Berechnung von $|\gamma'|$. Es ist

$$\gamma'(t) = \Big(e^t \cos(t) - e^t \sin(t),\ e^t \sin(t) + e^t \cos(t)\Big)$$

und somit

$$\begin{aligned} |\gamma'(t)|^2 &= \Big(e^t \cos(t) - e^t \sin(t)\Big)^2 + \Big(e^t \sin(t) + e^t \cos(t)\Big)^2 \\ &= e^{2t}\Big(\cos^2(t) - \cos(t)\sin(t) + \sin^2(t) + \sin^2(t) + \cos(t)\sin(t) + \cos^2(t)\Big) \\ &= e^{2t} \cdot 2. \end{aligned}$$

Folglich

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{2} e^t.$$

Nun können wir das Integral berechnen,

$$\int_0^\pi |\gamma'(t)| dt = \sqrt{2} \cdot \int_0^\pi e^t\, dt = \sqrt{2} \cdot \Big(e^\pi - 1\Big)$$

(b) (i.) Das Vektorfeld K ist der Gradient $\nabla f(x, y) = K(x, y)$ von

☒ $f(x,y) = x^2 + y^3$ ◯ $f(x,y) = x^2 + 3xy^2$
◯ $f(x,y) = x^2 \cdot y^3$ ◯ $f(x,y) = x + 2xy^2 + y^3$

(ii.) Das Potential von K ist $f(x,y) = x^2 + y^3$. Nach dem Hauptsatz über Gradietenfelder folgt:

$$\int_\sigma K \cdot d\gamma = f(-5,0) - f(0,0) = 25$$

(c) Damit das Vektorfeld konservativ ist, muss gelten

$$(x + ye^{2xy})_y = (axe^{2xy})_x.$$

Damit folgt, dass die Bedingung

$$e^{2xy} + 2xye^{2xy} = ae^{2xy} + a2xye^{2xy}$$

gelten muss. Also $a = 1$.

(d) (i.) Die Divergenz $\operatorname{div}(K_b)$ berechnet sich als $(8x + 2y + 4xy^2)_x + (-b(y^3 + 2y))_y$, also

$$\operatorname{div}(K_b) = 8 + 4y^2 - b(3y^2 + 2).$$

(ii.) Wir benutzen den Satz von Gauss, damit sind dann

$$\oint_{\gamma_1} K_b \cdot n\, ds = \iint_{T_1} 8 + 4y^2 - b(3y^2 + 2)\, dA$$

und

$$\oint_{\gamma_2} K_b \cdot n\, ds = \iint_{T_2} 8 + 4y^2 - b(3y^2 + 2)\, dA.$$

Die beiden Integrale sind gleich, wenn der Ausdruck unter dem Gebietsintegral konstant und auf beiden Seiten gleich ist. Diese Konstante dürfen wir vor das Integral ziehen und es ist

$$\iint_{T_{1,2}} 1\, dA = \text{ Flächeninhalte von } T_{1,2}.$$

Da die Flächeninhalte (Hinweis) gleich sind, sind damit auch die Integrale gleich. Damit nun

$$8 + 4y^2 - b(3y^2 + 2)$$

konstant ist, müssen die Ausdrücke mit y^2 verschwinden, und dies gilt genau für

$$b = \frac{4}{3}.$$