D–BIOL D–CHAB D–HEST

Prüfung Jahreskurs Mathematik I & II

401-0291-00L / 401-0292-00L

Nachname		**Vorname**		**Legi-Nummer**								**Prüfungsnr.**		
				X	X									

jeweils die ersten zwei Buchstaben — *letzte sechs Ziffern* — *Nicht ausfüllen*

Tragen Sie **jetzt die ersten zwei Buchstaben Ihres Nachnamens und Ihres Vornamens ein**, ebenso wie die **letzten sechs Ziffern Ihrer Legi-Nummer**. Wenn Sie separate Blätter beifügen, schreiben Sie diese, und **nur diese Informationen deutlich oben auf jedes Blatt**.

Prüfungsdauer: 3 Stunden.

Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten (nicht Blätter!) mit persönlichen, von Hand geschriebenen Notizen. Keine (Taschen-)Rechner. Ein Wörterbuch für fremdsprachige Studierende.

Bitte beachten Sie zunächst folgende Punkte:

- Schalten Sie Ihr **Handy aus** und legen Sie es weg - ebenso Ihre Smartwatch. **Sie dürfen während der Prüfung keine smarten Geräte - ausser Ihren Kopf - bei sich tragen.**
- Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch.
- Schreiben Sie **nicht** mit Bleistift und **nicht** mit roter oder grüner Farbe.
- Wir erwarten nicht, dass Sie alle Aufgaben lösen. Versuchen Sie einfach Ihr Bestes! Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet. Die Reihenfolge der Bearbeitung der Aufgaben ist Ihnen freigestellt.
- Beachten Sie die **Hinweise auf der Rückseite**.

Viel Erfolg!

Bitte nicht ausfüllen!

	1	2	3	4	5	Summe
Punkte						
Kontrolle						
Maximal	12	14	12	10	12	60

Hinweise zur Bearbeitung der Aufgaben

- Bearbeiten Sie die Aufgaben (wenn nicht anders angegeben) **direkt auf dem Prüfungsblatt**. Zwischenschritte werden nur dann bewertet, wenn es angegeben ist.
- Tragen Sie Ihre Lösung als Antwort auf die dafür vorgesehe Linie ein ("**Antwort:** _____").

  Bei Single-Choice-Aufgaben kreuzen Sie Ihre Antwort an ("$\otimes$").
  Antworten oder Kreuze an anderen Stellen werden nicht bewertet.
- Die Single-Choice-Aufgaben haben alle das Format **1 aus 4**:

  Es ist **genau eine** Antwort korrekt. Für das korrekte Kreuz gibt es einen Punkt. Punktabzug bei falschen Antworten gibt es nicht.
- Es gibt **Teilaufgaben, die auf einem separaten Blatt** beantwortet werden. Nur bei diesen Teilaufgaben werden auch Zwischenschritte bewertet. Bei diesen Teilaufgaben gibt es einen entsprechenden Hinweis ("**Bearbeiten Sie die Aufgabe auf einem separaten Blatt. Zwischenschritte werden bewertet.**").
- Bei Aufgaben auf separatem Blatt: Begründen Sie Ihre Lösungen. Dabei können bekannte Formeln aus der Vorlesung und den Übungen ohne Herleitung verwendet werden.
- Vereinfachen Sie Ihre Lösungen weitestgehend.

Am Ende der Prüfung

1. Ordnen Sie Ihre zusätzlichen Lösungsblätter nach Aufgaben.
2. Stecken Sie diese zusammen mit Ihrer Prüfung zuoberst in den bereitliegenden Umschlag. **Verkleben Sie den Umschlag nicht.** Dieser wird am Ende eingesammelt.

Aufgaben

Blättern Sie erst beim Beginn der Prüfung um!

1. (*12 Punkte*)

(a) Sei ln der natürliche Logarithmus.

(i.) Seien $x > 0$ und $f(x) = \ln(x^2) - \ln(2x)$. Berechnen Sie $f'(x)$.

Antwort:

$$f'(x) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

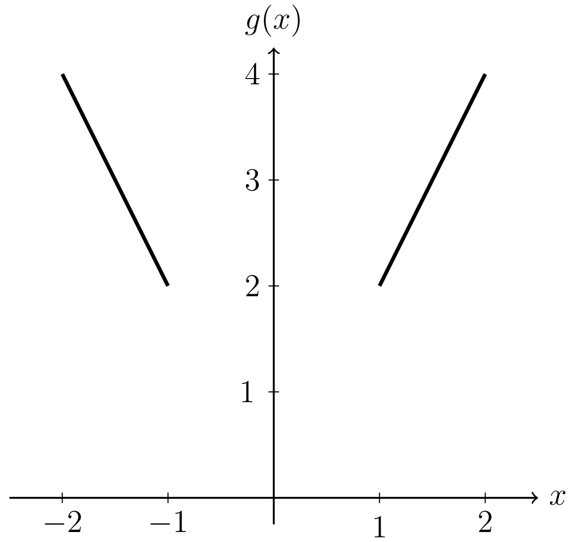
(ii.) Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\ln(x^2) - \ln(2x)}{x-2}$.

Antwort:

$$\lim_{x\to 2} \frac{\ln(x^2) - \ln(2x)}{x-2} = \_\_\_\_\_\_$$

(b) Gegeben sei die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = |x-1| + |x+1|$.

(i.) Ergänzen Sie den Graphen der Funktion g im Koordinatensystem unten, sodass dort ein Ausschnitt des Graphen im Intervall $[-2, 2]$ zu sehen ist.



(ii.) Geben Sie die Punkte $x \in \mathbb{R}$ an, in denen die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ <u>*nicht*</u> differenzierbar ist:

Antwort:

____

(c) Im Folgenden sei die Funktion $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $k(x) = e^{-x^2}$.

(i.) Sei $T_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ das 2. Taylor-Polynom von k an der Stelle $x_0 = 0$. Wie lautet der Koeffizient von x^2?

○ $a_2 = -2$ ○ $a_2 = \frac{1}{2}$

○ $a_2 = -1$ ○ $a_2 = 2$

(ii.) Sei $T_1(x) = a_0 + a_1 x$ das 1. Taylor-Polynom von k an der Stelle $x_0 = 0$. Bestimmen Sie den Wert $T_1(2)$.

○ $T_1(2) = 2$ ○ $T_1(2) = -1$

○ $T_1(2) = 1$ ○ $T_1(2) = -2$

(d) Gegeben sei die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = xe^{-3(x-1)}$.

(i.) Die Funktion h besitzt zwei Fixpunkte $\widetilde{x}_1$ und $\widetilde{x}_2$.

Antwort:

$\widetilde{x}_1 =$ __________ $\widetilde{x}_2 =$ __________

(ii.) Sei $(x_n)_{n\geq 0}$ eine Folge mit h als Reproduktionsfunktion, also

$$x_{n+1} = h(x_n) \qquad \text{für alle } n = 0, 1, 2, 3 \ldots$$

Sei $\widetilde{x} = \widetilde{x}_1$ oder $\widetilde{x} = \widetilde{x}_2$ einer der beiden Fixpunkte aus (i.).
Wir nennen den Fixpunkt $\widetilde{x}$ "attraktiv", wenn folgende Bedingung erfüllt ist:
Für jeden Startwert x_0 in der Nähe von $\widetilde{x}$ mit $x_0 \neq \widetilde{x}$ gilt $\widetilde{x} = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Prüfen Sie jeweils, ob $\widetilde{x}_1$ oder $\widetilde{x}_2$ attraktiv ist.

Bearbeiten Sie die Aufgabe auf einem separaten Blatt. Zwischenschritte werden bewertet.

(e) Sei ln der natürliche Logarithmus. Dann gibt es eine Zahl $B > 0$ mit

$$\int_0^{\ln(7)} \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \ln(B).$$

Bestimmen Sie B.

Hinweis: Nutzen Sie die Logarithmusgesetze.

Bearbeiten Sie die Aufgabe auf einem separaten Blatt. Zwischenschritte werden bewertet.

2. (*14 Punkte*)

(a) Gegeben sei die komplexe Zahl $z_1 = \dfrac{4}{i-1}$. Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil.

Antwort:

$\mathrm{Re}(z_1) =$ ____________ $\qquad$ $\mathrm{Im}(z_1) =$ ____________

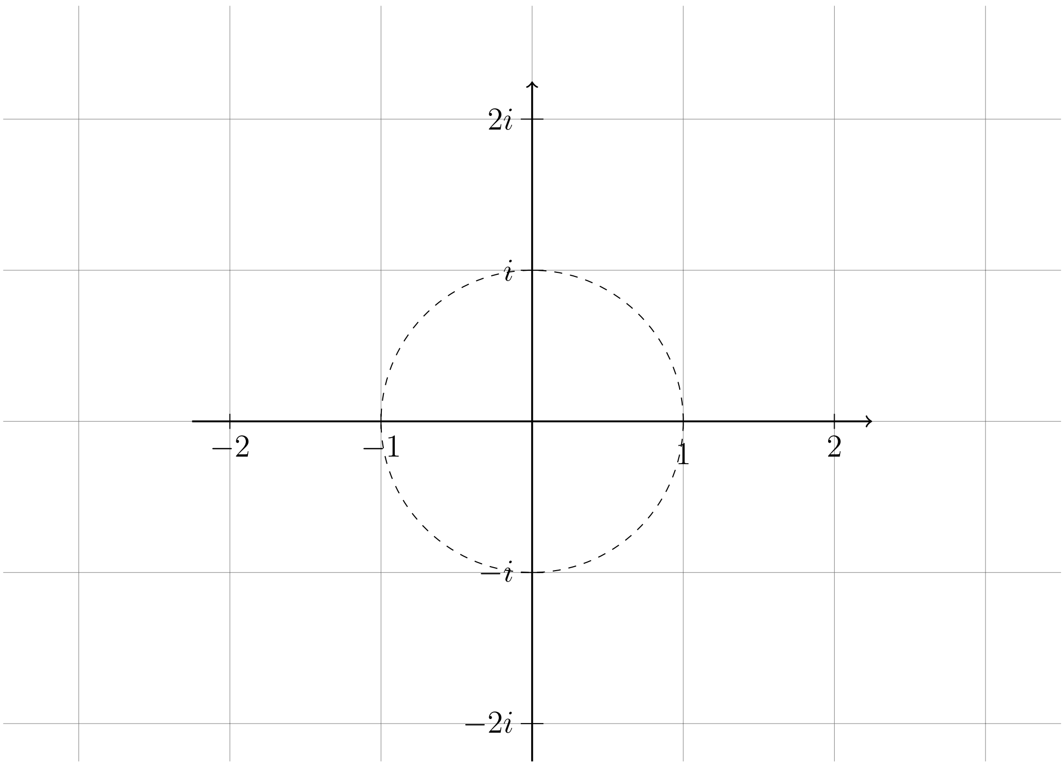
(b) Gegeben sei die komplexe Zahl $z_2 = (-\sqrt{3} + i)^2$.

(i.) Bestimmen Sie die Polardarstellung $z_2 = r \cdot e^{i\varphi}$ mit $-\pi < \varphi \leq \pi$.

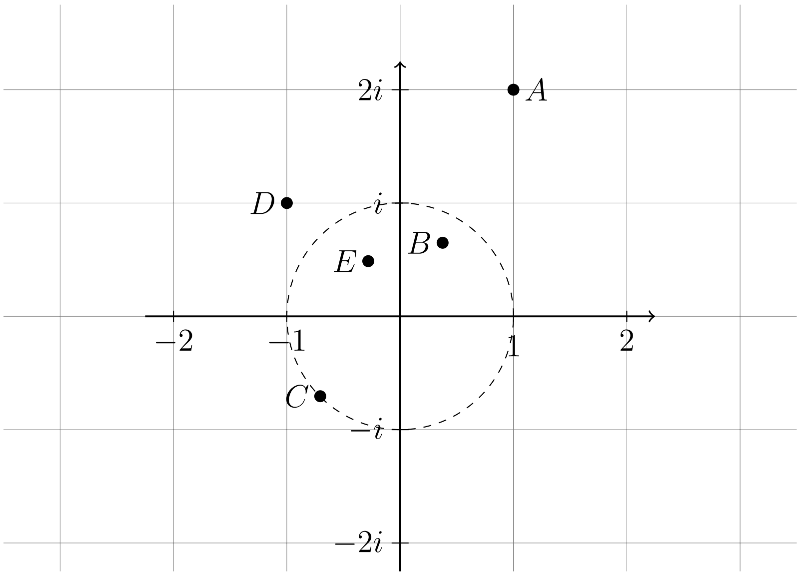
Antwort:

$r =$ ____________ $\qquad$ $\varphi =$ ____________

(ii.) Zeichnen Sie $\dfrac{z_2}{|z_2|}$ in die komplexe Zahlenebene unten.



(c) Betrachten Sie die Zahlen A bis E in der komplexen Zahlenebene:

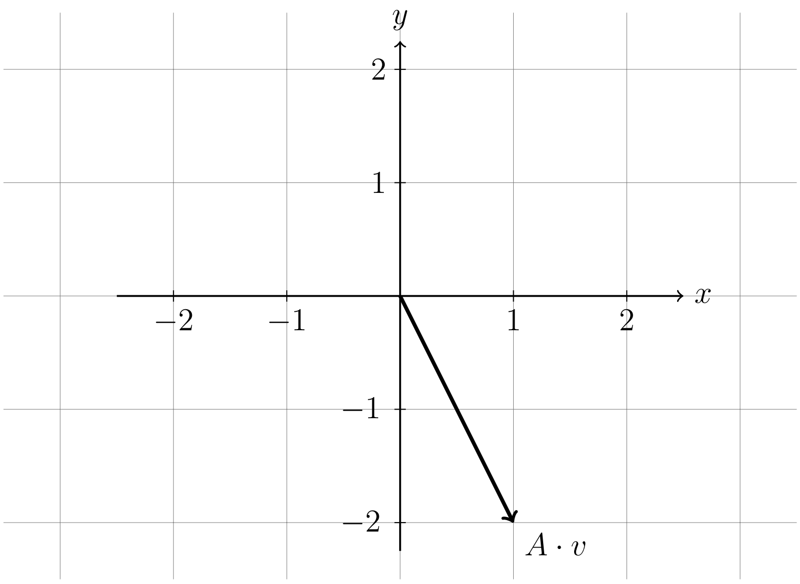


Eine der folgenden Gleichungen ist korrekt. Welche?

◯ $D^3 = A$ ◯ $B^2 = E$

◯ $\overline{C}^2 = D$ ◯ $A^2 = C$

(d) Gegeben seien der Vektor $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$ und die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -1 & d \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die fehlenden Einträge b und d so, dass $A \cdot v$ der Vektor wie unten eingezeichnet ist.



Antwort:

$b =$ ____________ $d =$ ____________

(e) Gegeben sei die Matrix $D_b = \begin{pmatrix} 4 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ mit $b \in \mathbb{R}$.

(i.) Berechnen Sie die Determinante von D_b in Abhängigkeit von b.

Antwort:

$$\det(D_b) = \underline{\hspace{3cm}}$$

(ii.) Für welches b hat das Gleichungssystem $D_b \cdot x = 0$ unendlich viele Lösungen?

Antwort:

$$b = \underline{\hspace{3cm}}$$

(iii.) Es ist
$$\det(D_b - \lambda \cdot E_3) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 8 + b).$$

Für welches b hat die Matrix D_b Eigenwerte, die <u>nicht</u> auf der reellen Achse liegen?

○ $b = -1$　　○ $b = 1$

○ $b = 0$　　○ $b = 2$

Für welches b ist das Produkt der Eigenwerte von D_b eine Quadratzahl?

○ $b = 0$　　○ $b = 2$

○ $b = 1$　　○ $b = 4$

Für welches b ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von D_b?

○ $b = -3$　　○ $b = 1$

○ $b = -1$　　○ $b = 3$

(f) Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Diese definiert eine Entwicklung $v_{n+1} = A \cdot v_n$ für $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$.

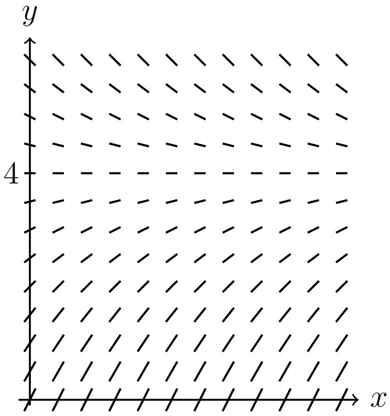
Sei $v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 64 \\ 96 \end{pmatrix}$ ein Startvektor. Bestimmen Sie den Vektor v_5.

Hinweis: Es reicht, den Vektor v_1 zu berechnen und auszunutzen, dass v_0 ein Eigenvektor ist.

Bearbeiten Sie die Aufgabe auf einem separaten Blatt. Zwischenschritte werden bewertet.

3. (*12 Punkte*)

(a) (i.) Folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Richtungsfeldes, welches zu der Differentialgleichung $y'(x) = a \cdot y(x) + 2$ gehört.



Bestimmen Sie a.

Antwort:

$$a = \underline{\qquad\qquad}$$

(ii.) Sei y die Lösung der Differentialgleichung in (i.) mit dem Anfangswert $y(0) = 0$. Bestimmen Sie den Wert $y(\ln(4))$.

Hinweis: Falls Sie Teil (i.) nicht gelöst haben, verwenden Sie $a = 2$.

Bearbeiten Sie die Aufgabe auf einem separaten Blatt. Zwischenschritte werden bewertet.

(b) Gegeben sei ein Anfangswertproblem:

$$y'(x) = (y(x) + 3)(y(x) - 2)(y(x) - 5), \quad y(0) = 1.$$

Welche Aussage über die Lösung y ist korrekt?

- ○ $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = +\infty$.
- ○ $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 2$.
- ○ $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = -3$.
- ○ $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 5$.

(c) Wir betrachten die folgende inhomogene Differentialgleichung:

$$y'(x) - (x^2 + 2)y(x) = e^{\frac{1}{3}x^3}$$

(i.) Geben Sie die allgemeine Lösung der dazugehörigen <u>*homogenen*</u> Differentialgleichung an.

Antwort:

$$y_h(x) = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

(ii.) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der <u>*inhomogenen*</u> Differentialgleichung durch Variation der Konstanten.

Bearbeiten Sie die Aufgabe auf einem separaten Blatt. Zwischenschritte werden bewertet.

(d) Gegeben sei die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y''(x) - 6y'(x) + 5y(x) = 0.$$

Geben Sie die allgemeine Lösung $x \mapsto y(x)$ an.

Antwort:

$$y(x) = \underline{\hspace{6cm}}$$

(e) Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ definiere das System $y'(x) = A \cdot y(x)$.

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems.

Bearbeiten Sie die Aufgabe auf einem separaten Blatt. Zwischenschritte werden bewertet.

4. (*10 Punkte*)

(a) Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + 2xy - 8x - y^2$.

(i.) Die Funktion f hat zwei kritische Punkte. Bestimmen Sie diese.

Antwort:

$(x_1, y_1) =$ ____________ $(x_2, y_2) =$ ____________

(ii.) Betrachten Sie den Punkt $(x_0, y_0) = (0, -1)$ in $\mathbb{R}^2$. Geben Sie a, b und c so an, dass

$$l(x,y) = c + ax + b(y+1)$$

die Tangentialebene von f in $(0, -1, f(0,-1))$ beschreibt.

Antwort:

$a =$ __________ $b =$ __________ $c =$ __________

(b) Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $g(x,y) = y^2 - x^3 + y^2 x - 7$.

(i.) Für welche $y \in \mathbb{R}$ liegt $(0, y)$ auf der Niveaukurve der Funktion g zur Höhe 2?

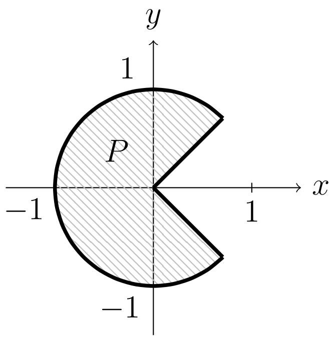
Antwort:

____

(ii.) Sei C die Niveaukurve der Funktion g zur Höhe 0.
Die Steigung der Tangente an diese Kurve im Punkt $(1, 2)$ ist

- ○ -8
- ○ $\frac{1}{8}$
- ○ $-\frac{1}{8}$
- ○ 8

(c) Gegeben sei das Gebiet P (ein Dreiviertelkreis symmetrisch zur x-Achse):



(i.) Vervollständigen Sie die Beschreibung von P in Polarkoordinaten mit $0 \leq \varphi < 2\pi$:

$$P = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x,y) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \text{ mit } r \in [0,1],\ \varphi \in [\_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_] \right\}.$$

(ii.) Berechnen Sie

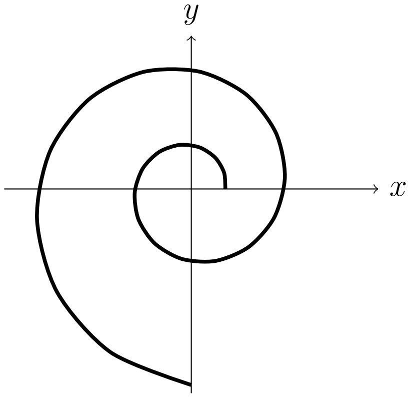
$$\iint_P (2 + x + y)\, dA.$$

Bearbeiten Sie die Aufgabe auf einem separaten Blatt. Zwischenschritte werden bewertet.

5. (*12 Punkte*)

(a) Sei $\gamma(t) = \big(e^t\cos(t), e^t\sin(t)\big)$ für $t \in \mathbb{R}$ gegeben.

(i.) Für welches Intervall I erhalten wir mit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \gamma(t)$ die unten abgebildete Kurve?



○ $I = \Big[0,\, 6\pi\Big]$ ○ $I = \Big[0,\, \dfrac{3\pi}{4}\Big]$

○ $I = \Big[0,\, \dfrac{7\pi}{2}\Big]$ ○ $I = \Big[-\dfrac{\pi}{2},\, \pi\Big]$

(ii.) Wir betrachten das Kurvenstück für $t \in [0, \pi]$. Berechnen Sie dessen Länge L.

Bearbeiten Sie die Aufgabe auf einem separaten Blatt. Zwischenschritte werden bewertet.

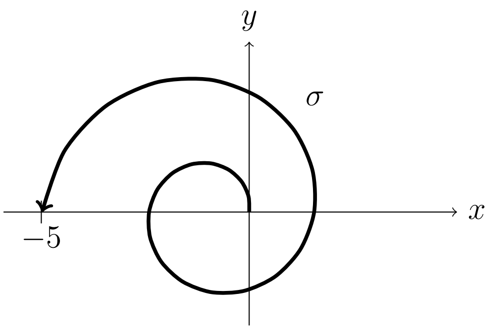
(b) Gegeben sei das Vektorfeld $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $K(x, y) = (2x, 3y^2)$.

(i.) Für welchen der folgenden Ausdrücke $f(x, y)$ ist der Gradient $\nabla f(x, y) = K(x, y)$?

○ $f(x, y) = x^2 + y^3$ ○ $f(x, y) = x^2 + 3x(y + 1)^2$

○ $f(x, y) = x^2 \cdot y^3$ ○ $f(x, y) = x + 2xy^2 + y^3$

(ii.) Gegeben sei die ebene Kurve σ unten:



Berechnen Sie die Arbeit $\displaystyle\int_\sigma K \cdot d\gamma$.

Antwort:

$$\int_\sigma K \cdot d\gamma = \underline{\hspace{3cm}}$$

(c) Sei das Vektorfeld $K_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ gegeben:

$$K_a(x,y) = (x + ye^{2xy}, axe^{2xy}).$$

Bestimmen Sie a, sodass K_a ein konservatives Vektorfeld ist.

Antwort:

$$a = \underline{\qquad\qquad}$$

(d) Sei das Vektorfeld $K_b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ in Abhängigkeit von $b \in \mathbb{R}$ gegeben:

$$K_b(x,y) = \big(8x + 2y + 4xy^2, -b(y^3 + 2y)\big)$$

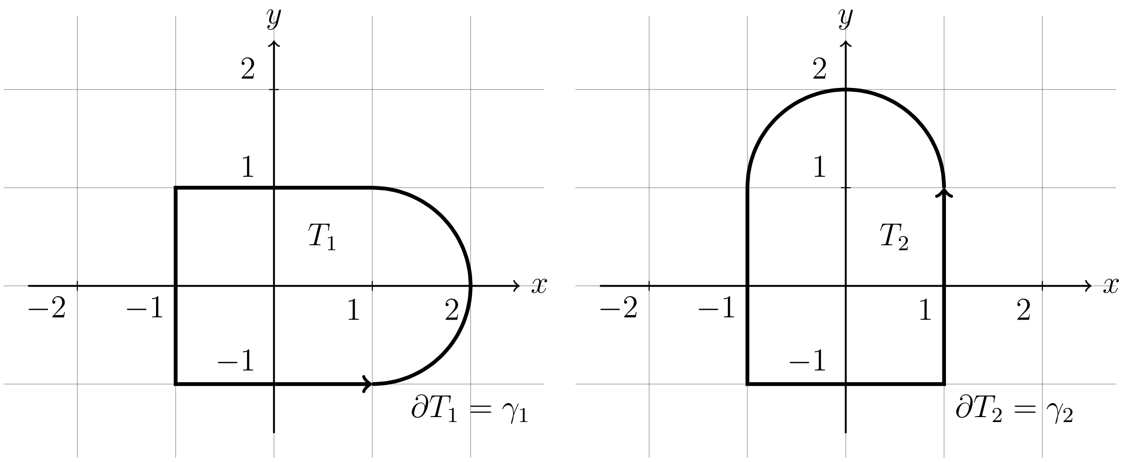
gegeben.

(i.) Berechnen Sie die Divergenz $\operatorname{div}(K_b)$ in Abhängigkeit von b:

Antwort:

$$\operatorname{div}(K_b)(x,y) = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

(ii.) Betrachten Sie die zwei Gebiete T_1 und T_2 mit Randkurven $\partial T_1 = \gamma_1$ und $\partial T_2 = \gamma_2$.



Finden Sie ein $b \in \mathbb{R}$, sodass der Fluss von innen nach aussen für beide Kurven γ_1 und γ_2 gleich ist, das heisst

$$\oint_{\gamma_1} K_b \cdot n \, ds = \oint_{\gamma_2} K_b \cdot n \, ds.$$

Dabei ist n der äussere Normaleneinheitsvektor.

Hinweis: Die Gebiete T_1 und T_2 haben den gleichen Flächeninhalt.

Bearbeiten Sie die Aufgabe auf einem separaten Blatt. Zwischenschritte werden bewertet.