Aufgaben und Lösungsvorschlag

1. Aufgabe **[16 Punkte]**

Schreiben Sie die Lösungen **vollständig gekürzt und vereinfacht** in das jeweils vorgegebene Feld im Antwortheft. Sie brauchen **keine** Zwischenschritte oder Begründungen angeben. Antworten, die Sie woanders als in das vorgebenene Feld im Antwortheft hinschreiben, werden **nicht** gewertet.

(a) [**1 Punkt**] Sei a_n die Folge $a_n = \dfrac{3n^4 - 6n^2 + 9n - 12}{5n^4 - 10n^3 + 15n - 20}$. Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Lösung:

$3/5$

(b) [**1 Punkt**] Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = \sin(\sqrt{x^3})$.

Lösung:

$\frac{3}{2}\sqrt{x}\cos(\sqrt{x^3})$

(c) [**1 Punkt**] Berechnen Sie das Integral $\int_0^1 f(x)\,dx$ der Funktion $f(x) = 3x\sqrt{1-x}$.

Lösung:

$4/5$

(d) [**2 Punkte**] Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int f(x)\,dx$ der Funktion $f(x) = \dfrac{3x-1}{x^2-2x-3}$.

Lösung:

$2\ln|x-3| + \ln|x+1| + C$

(e) [**1 Punkt**] Berechnen Sie das Integral $\int_0^{\sqrt{\pi}} f(x)\,dx$ der Funktion $f(x) = x^3\sin(x^2)$.

Lösung:

$\pi/2$

(f) [**2 Punkte**] Finden Sie alle Parameter $a \in \mathbb{R}$ für die die Funktion $f(x) = \cos(x) - ax$ strikt monoton fallend ist. Geben Sie Ihre Antwort in der Form $r < a < s$ an mit gewissen Schranken $r, s \in [-\infty, \infty]$.

Lösung:

$1 < a$
$a < \infty$

(g) **[1 Punkt]** Wie muss der Parameter $b \in \mathbb{R}$ gewählt werden (in Abhängigkeit vom Parameter $a \in \mathbb{R}$), damit die folgende Funktion im Punkt 0 stetig ist?

$$f(x) = \begin{cases} x^{-1}\sin(x^2) - a(x+1) & \text{falls } x > 0 \\ a\ln(1+x) + b & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$$

Hinweis: Es gilt $\lim_{x\to 0} x^{-1}\sin(x) = 1$.

Lösung:

$b = -a$

(h) **[2 Punkte]** Wie müssen die Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit die Funktion aus Teilaufgabe (g) im Punkt 0 differenzierbar ist?

Lösung:

$a = \frac{1}{2}$
$b = -\frac{1}{2}$

(i) **[2 Punkte]** Bestimmen Sie den zweiten und dritten Koeffizienten (also a_1 und a_2) der Taylorreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$ von $f(x) = x^2\ln(x^{-1})$ um den Punkt 1.

Lösung:

$a_1 = -1$
$a_2 = -\frac{3}{2}$

(j) **[1 Punkt]** Bestimmen Sie den Konvergenzradius r der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} n^{-1}2^{-n}x^n$.

Lösung:

$r = 2$

(k) **[2 Punkte]** Für die Reihe aus der vorherigen Teilaufgabe mit Konvergenzradius r, geben Sie mit ja/nein an, ob die Reihe für $x = r$ oder $x = -r$ konvergiert.

Lösung:

$x = r$: nein
$x = -r$: ja

2. Aufgabe **[9 Punkte]**

In dieser Aufgabe bezeichnet i die komplexe Einheit, also $i^2 = -1$. Schreiben Sie die Lösungen **vollständig gekürzt und vereinfacht** in das jeweils vorgegebene Feld im Antwortheft. Sie brauchen **keine** Zwischenschritte oder Begründungen angeben. Antworten, die Sie woanders als in das vorgebenene Feld im Antwortheft hinschreiben, werden **nicht** gewertet.

(a) [**2 Punkte**] Geben Sie die komplexen Zahlen $z_1 = 2 + (1+i)^2$ und $z_2 = \dfrac{3+2i}{3i-2}$ in Polarkoordinaten an.

Lösung:

$z_1 = \sqrt{8}e^{i\pi/4}$
$z_2 = e^{i3\pi/2}$

(b) [**2 Punkte**] Geben Sie die komplexen Zahlen $z_1 = \dfrac{\sqrt{5}|1-2i|(2-i)}{2+i}$ und $z_2 = \dfrac{3-\sqrt{8}e^{i\pi/4}}{6+8i}$ in der Form $a + bi$ an.

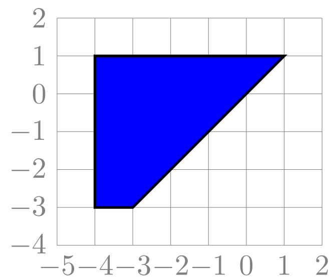
Lösung:

$z_1 = 3 - 4i$
$z_2 = -1/10 - i/5$

(c) [**2 Punkte**] Zeichnen Sie die folgende Menge in der komplexen Ebene:

$$\{z \in \mathbb{C} \mid -4 \leq \mathrm{Re}(z) \leq \mathrm{Im}(z) \text{ und } -3 \leq \mathrm{Im}(z) \leq 1\}.$$

Lösung:



(d) [**3 Punkte**] Finden Sie alle komplexen Nullstellen des Polynoms $z^3 + 4z^2 + 16z + 64$. Geben Sie die Lösungen in der Form $a + bi$ an.

Lösung:

-4
$4i$
$-4i$

3. Aufgabe **[12 Punkte]**

Für die Teilaufgaben (a) und (b): Schreiben Sie die Lösungen in das jeweils vorgegebene Feld im Antwortheft. Sie brauchen **für (a) und (b) keine** Zwischenschritte oder Begründungen angeben. Antworten **zu (a) und (b)**, die Sie woanders als in das vorgebenene Feld im Antwortheft hinschreiben, werden **nicht** gewertet.

Sei A die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \mu \\ \mu & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ mit einem Parameter $\mu \in \mathbb{R}$ und sei b der Vektor $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(a) [**2 Punkte**] Bestimmen Sie alle Parameter $\mu \in \mathbb{R}$ für welche die Determinante von A gleich Null ist.
Lösung:

$\mu = 0$
$\mu = 4$

(b) [**1 Punkt**] Bestimmen Sie alle Parameter $\mu \in \mathbb{R}$ für welche die zwei Vektoren b und $A^T b$ linear abhängig sind.
Lösung:

$\mu = 2$

(c) [**3 Punkte**] Berechnen Sie den Rang von A in Abhängigkeit von μ für alle $\mu \in \mathbb{R}$.
Lösung:

Wir wissen bereits aus (a), dass $\det(A) = 0$ für $\mu = 0$ und $\mu = 4$. Insbesondere hat A vollen Rang genau dann, wenn $\mu \notin \{0, 4\}$.
Die Fälle $\mu = 0$ und $\mu = 4$ werden separat betrachtet mit Zeilenumformungen. Für $\mu = 0$ gilt

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3+3Z_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3-2Z_2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix hat also Rang 2 wenn $\mu = 0$. Für $\mu = 4$ gilt ähnlicherweise

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2+4Z_1]{Z_3+3Z_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 15 \\ 0 & 4 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3-(2/3)Z_2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Auch in diesem Fall hat die Matrix Rang 2.

(d) [**2 Punkte**] Sei $\mu = 2$. Finden Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$.
Lösung:

Mit Zeilenumformungen finden wir

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_2+2Z_1]{Z_3+3Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3-Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_1-2Z_3]{Z_2-3Z_3} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1-(1/4)Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Aus der letzten Matrix können wir die Lösung ablesen: $x_3 = 0$, $x_2 = 1/2$ und $x_1 = -1/2$.

(e) [**4 Punkte**] Finden Sie die Eigenwerte von $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ sowie zu jedem der beiden Eigenwerte einen dazugehörigen normierten Eigenvektor.

Lösung:

Zuerst berechnen wir das charakteristische Polynom von B;

$$\det(B - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = -(1-\lambda)(1+\lambda) - 8 = (\lambda - 3)(\lambda + 3).$$

Die Eigenwerte von B sind also 3 und -3.
Um einen Eigenvektor zu finden lösen wir das homogene lineare Gleichungssystem $(B - \lambda I)x = 0$. Für $\lambda = 3$ bekommen wir

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 4 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_2+Z_1} \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Also ist der Eigenvektor zum Eigenwert 3 gegeben durch $t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit einem Parameter $t \in \mathbb{R}$. Normiert ist der Eigenvektor wenn $1 = |(2t, t)^T| = \sqrt{5}|t|$. Ein normierter Eigenvektor zum Eigenwert 3 ist daher $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Analog ermitteln wir den Eigenvektor zum Eigenwert -3;

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_2-(1/2)Z_1} \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Der Eigenvektor ist $t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit einem Parameter $t \in \mathbb{R}$. Normiert ist der Eigenvektor wenn $1 = |(t, -t)^T| = \sqrt{2}|t|$. Ein normierter Eigenvektor zum Eigenwert 3 ist daher $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

4. Aufgabe **[12 Punkte]**

Betrachten Sie die Funktion $f(x,y) = x^2y^2 + x^3 - 3x$.

(a) [**3 Punkte**] Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene des Graphen von f im Punkt $(-1, 1, 3)$.

Lösung:

Wir müssen die partiellen Ableitungen von f im Punkt $(-1, 1)$ berechnen. Es gilt
$f_x(x,y) = 2xy^2 + 3x^2 - 3$ $f_y(x,y) = 2x^2y$
und daher $f_x(-1,1) = -2$ und $f_y(-1,1) = 2$. Somit ist die gesuchte Gleichung der Tangentialebene
$z = 3 - 2(x+1) + 2(y-1) = -2x + 2y - 1$.

(b) [**5 Punkte**] Finden Sie alle kritischen Punkte von f und bestimmen Sie jeweils, ob es sich um einen Sattelpunkt, ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum handelt.

Lösung:

Wir kennen bereits die partiellen Ableitungen f_x und f_y. Setzen wir diese gleich Null, so ergibt sich

$$0 = 2xy^2 + 3x^2 - 3 \qquad \text{und} \qquad 0 = 2x^2y.$$

Aus der ersten Gleichung folgt $x \neq 0$ und daher aus der zweiten $y = 0$. Mit $y = 0$ wird die erste Gleichung zu $0 = 3x^2 - 3$. Die kritischen Punkte sind damit $(1, 0)$ und $(-1, 0)$.

Um den Typ kritischen Punkt zu ermitteln, berechnen wir die Diskrimante:

$$\begin{aligned}\Delta(x,y) &= f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y)^2 = (2y^2 + 6x)2x^2 - (4xy)^2 \\ &= 12x^3 - 12x^2y^2 = 12x^2(x - y^2).\end{aligned}$$

Insbesondere gilt $\Delta(1,0) = 12$ und $\Delta(-1,0) = -12$. Also ist $(1,0)$ ein lokales Extremum und $(-1,0)$ ein Sattelpunkt. Der Punkt $(1,0)$ ist zudem ein lokales Minimum, denn $f_{xx}(1,0) = 6 > 0$.

(c) [**4 Punkte**] Betrachten Sie nun die Funktion f unter der Nebenbedingung $3x = y^2$. Schreiben Sie die Lagrangefunktion Λ auf und finden Sie alle kritischen Punkte von Λ.

Lösung:

Die Lagrangefunktion ist $\Lambda(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\phi(x,y)$ mit $\phi(x,y) = 3x - y^2$, also

$$\Lambda(x,y,\lambda) = x^2y^2 + x^3 - 3x + \lambda(3x - y^2).$$

Ihre partiellen Ableitungen sind

$$\begin{aligned}\Lambda_x(x,y,\lambda) &= 2xy^2 + 3x^2 - 3 + 3\lambda, \\ \Lambda_y(x,y,\lambda) &= 2x^2y - 2\lambda y, \\ \Lambda_\lambda(x,y,\lambda) &= 3x - y^2.\end{aligned}$$

Wir suchen nun gemeinsame Nullstellen (x, y, λ). Wenn $y = 0$, dann ist $x = 0$ und $\lambda = 1$. Wenn $y \neq 0$, dann ist $\lambda = x^2$ sowie $y^2 = 3x$ und Einsetzen in die erste Gleichung liefert $0 = 6x^2 + 3x^2 - 3 + 3x^2 = 12x^2 - 3$, also $x = \pm 1/2$. Da $3x = y^2 \geq 0$ können wir $x = -1/2$ aussschliessen. Daher gilt $x = 1/2$, $y = \pm\sqrt{3/2}$ und $\lambda = 1/4$. Die kritischen Punkte sind also $(0, 0, 1)$, $(1/2, \sqrt{3/2}, 1/4)$ und $(1/2, -\sqrt{3/2}, 1/4)$.

5. Aufgabe **[12 Punkte]**

Finden Sie die Lösung folgender Anfangswertprobleme.

(a) [**4 Punkte**] $y' + 3y = 9x$ mit $y(0) = 4$.
Lösung:

Wir präsentieren zwei Lösungswege.

i. Wir benutzen die Methode der Variation der Konstanten. Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung $y' + 3y = 0$ ist aus der Vorlesung bekannt als

$$y_0(x) = K \exp\Big(- \int 3dx \Big) = Ke^{-3x}.$$

Nun machen wir den Ansatz $y(x) = K(x)e^{-3x}$ und setzen dies in die inhomogene Differentialgleichung ein. Dies ergibt

$$9x = y'(x) + 3y(x) = K'(x)e^{-3x} - 3K(x)e^{-3x} + 3K(x)e^{-3x} = K'(x)e^{-3x}.$$

Mit partieller Integration finden wir

$$K(x) = \int 9xe^{3x}dx = 3xe^{3x} - \int 3e^{3x}dx = 3xe^{3x} - e^{3x} + C.$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist somit

$$y(x) = 3x - 1 + Ce^{-3x}.$$

Die Anfangsbedingung ergibt $4 = y(0) = C - 1$. Die Lösung des Anfangswertporblems ist

$$y(x) = 3x - 1 + 5e^{-3x}.$$

ii. Wir suchen zunächst eine partikuläre Lösung. Da die Störfunktion $g(x) = 9x$ ein Polynom ersten Grades ist, machen wir den Ansatz

$$y_p(x) = ax + b.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$9x = y_p' + 3y_p = a + 3ax + 3b.$$

Mit einem Koeffizientenvergleich finden wir die Parameter $a = 3$ und $b = -1$. Eine partikuläre Lösung ist also

$$y_p(x) = 3x - 1.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung $y' + 3y = 0$ ist aus der Vorlesung bekannt, nämlich

$$y_0(x) = C \exp\Big(- \int 3dx \Big) = Ce^{-3x}.$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist somit

$$y(x) = 3x - 1 + Ce^{-3x}.$$

Die Anfangsbedingung ergibt $4 = y(0) = C - 1$. Die Lösung des Anfangswertporblems ist

$$y(x) = 3x - 1 + 5e^{-3x}.$$

(b) **[4 Punkte]** $y'' + 4y' + 4y = -2e^{-2x}$ mit $y(0) = y'(0) = -1$.
Lösung:

Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung. Das charakteristische Polynom der homogenen Differentialgleichung $y'' + 4y' + 4y = 0$ lautet

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2$$

mit doppelter Nullstelle -2.
Da die Störfunktion $g(x) = -2e^{-2x}$ eine Exponentialfunktion ist, bei der die doppelte Nullstelle -2 als Faktor im Exponenten auftaucht, machen wir für eine partikuläre Lösung den Ansatz

$$y_p(x) = Ax^2e^{-2x}.$$

Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung ergibt

$$-2e^{-2x} = y_p'' + 4y_p' + 4y_p = 2A(2x^2 - 4x + 1)e^{-2x} - 8A(x^2 - x)e^{-2x} + 4Ax^2e^{-2x} = 2Ae^{-2x},$$

also brauchen wir $A = -1$ und eine partikuläre Lösung ist gegeben durch

$$y_p(x) = -x^2e^{-2x}.$$

Die allgemeine Lösung y_0 der homogenen Differentialgleichung kennen wir aus der Vorlesung, nämlich

$$y_0(x) = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x}.$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist daher

$$y(x) = y_p(x) + y_0(x) = (-x^2 + C_1 + C_2x)e^{-2x}.$$

Die Anfangsbedingungen ergeben $-1 = y(0) = C_1$ und $-1 = y'(0) = C_2 - 2C_1$. Die Lösung des Anfangswertproblems ist nun

$$y(x) = (-x^2 - 1 - 3x)e^{-2x}.$$

(c) **[4 Punkte]** $2x^2y' - y^2 = x^2$ mit $y(1) = -1$.
Lösung:

Umformen der Gleichung ergibt

$$y' = \frac{1}{2}\Big(\frac{y^2}{x^2} + 1\Big).$$

Die DGL ist also von der Form $y' = f(y/x)$ mit $f(u) = (u^2 + 1)/2$. Es bietet sich daher die Substituion $u = y/x$ an.
Dann gilt mit der Produktregel $y' = u + xu'$. Die DGL nimmt damit folgende Gestalt an:

$$u + xu' = \frac{1}{2}(u^2 + 1).$$

Diese DGL können wir mit Trennung der Variablen lösen;

$$\frac{2u'}{(u-1)^2} = \frac{1}{x} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{2du}{(u-1)^2} = \frac{dx}{x} \qquad \Longrightarrow \qquad 2\int \frac{du}{(u-1)^2} = \int \frac{dx}{x}$$

Daraus folgt

$$-2(u-1)^{-1} = \ln(|x|) + C.$$

Die Lösung ausgedrückt in u ist daher

$$u(x) = 1 - \frac{2}{\ln(|x|) + C}.$$

Rücktransformieren zu y ergibt

$$y(x) = x - \frac{2x}{\ln(|x|) + C}.$$

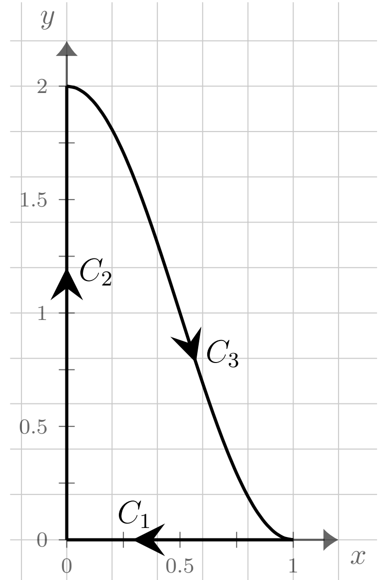
Die Anfangsbedingung $y(1) = -1$ legt die Konstante als $C = 1$ fest. Die Lösung des Anfangswertproblems ist somit

$$y(x) = x - \frac{2x}{\ln(|x|) + 1}.$$

6. Aufgabe **[10 Punkte]**

Für die Teilaufgaben (a) und (b): Schreiben Sie die Lösungen in das jeweils vorgegebene Feld im Antwortheft. Sie brauchen **für (a) und (b) keine** Zwischenschritte oder Begründungen angeben. Antworten **zu (a) und (b)**, die Sie woanders als in das vorgebenene Feld im Antwortheft hinschreiben, werden **nicht** gewertet.

In der Skizze sehen Sie drei Kurven C_1, C_2, C_3. Die Kurve C_3 ist von der Form $C_3(t) = (t, \cos(at) + b)$ für gewisse Parameter $a, b \in \mathbb{R}$. An den Endpunkten ist die Kurve C_3 flach, d.h. ihre Tangente ist dort jeweils parallel zur x-Achse.



(a) [**3 Punkte**] Finden Sie Parametrisierungen der drei Kurven. Für C_3 heisst dies, dass Sie die Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ bestimmen müssen. Beachten Sie die in der Skizze eingezeichneten Durchlaufrichtungen. Es gibt nicht nur eine Lösung.

Lösung:

Eine mögliche Lösung ist

$$C_1(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad C_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2t \end{pmatrix}, \qquad C_3(t) = \begin{pmatrix} t \\ \cos(\pi t) + 1 \end{pmatrix}$$

mit jeweils $0 \leq t \leq 1$.

(b) [**1 Punkte**] Sei D die Fläche, die von den drei Kurven eingeschlossen wird. Berechnen Sie den Flächeninhalt von D.

Lösung:

1

(c) [**4 Punkte**] Sei nun $\vec{F}$ das Vektorfeld $\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y - 1 \\ x - 2y + 2 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{2}{3} \qquad \text{und} \qquad \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \qquad \text{und} \qquad \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\frac{2}{3}.$$

Hinweis: Wir erinnern daran, dass $\frac{d}{dt} \sin^2(t) = 2 \sin(t) \cos(t)$.

Lösung:

Um ein Linienintegral zu berechnen, müssen wir die Kurve in das Vektorfeld einsetzen, die Kurve ableiten, und dann das Skalarprodukt von Vektorfeld und Ableitung integrieren. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{F}(C_1(t)) = \begin{pmatrix} t^2-2t \\ 3-t \end{pmatrix}, \qquad \dot{C}_1(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Longrightarrow \overrightarrow{F}(C_1(t)) \cdot \dot{C}_1(t) = 2t - t^2 \\
&\Longrightarrow \int_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_0^1 (2t-t^2)dt = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{F}(C_2(t)) = \begin{pmatrix} 2t-1 \\ -4t+2 \end{pmatrix}, \qquad \dot{C}_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&\Longrightarrow \overrightarrow{F}(C_2(t)) \cdot \dot{C}_2(t) = -4(2t-1) \\
&\Longrightarrow \int_{C_2} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = -4\int_0^1 (2t-1)dt = 0
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{F}(C_3(t)) = \begin{pmatrix} t^2+\cos(\pi t) \\ t-2\cos(\pi t) \end{pmatrix}, \qquad \dot{C}_3(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\pi\sin(\pi t) \end{pmatrix} \\
&\Longrightarrow \overrightarrow{F}(C_3(t)) \cdot \dot{C}_3(t) = t^2 + \cos(\pi t) - \pi t\sin(\pi t) + 2\pi\cos(\pi t)\sin(\pi t) \\
&\Longrightarrow \int_{C_3} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_0^1 \left[t^2 + \cos(\pi t) - \pi t\sin(\pi t) + 2\pi\cos(\pi t)\sin(\pi t)\right]dt.
\end{aligned}$$

Für den Term $-\pi t\sin(\pi t) = t\frac{d}{dt}\cos(\pi t)$ benutzen wir partielle Integration und für den letzten Term bemerken wir, dass $2\pi\cos(\pi t)\sin(\pi t) = \frac{d}{dt}\sin^2(\pi t)$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_{C_3} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} &= \frac{1}{3} + \frac{1}{\pi}\sin(\pi t)\Big|_0^1 + t\cos(\pi t)\Big|_0^1 - \int_0^1 \cos(\pi t)dt + \sin^2(\pi t)\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{3} - 1 - \frac{1}{\pi}\sin(\pi t)\Big|_0^1 = -\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

(d) **[2 Punkte]** Mit C bezeichnen wir die geschlossene Kurve, die sich ergibt indem man C_1, C_2 und C_3 nacheinander durchläuft. Berechnen Sie $\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$, indem Sie den Satz von Gauss-Green anwenden.

Lösung:

Wir schreiben das Vektorfeld $\overrightarrow{F}$ als $\overrightarrow{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))^T$. Der Satz von Gauss-Green besagt, dass

$$\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = -\iint_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)dA$$

(Minus wegen der Durchlaufrichtung). Da $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$, gilt also $\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 0$.