D–BIOL/D–CHAB/D–HEST

Prüfung Mathematik I/II

401-0291-00L / 401-0292-00L

Bitte noch nicht umblättern!

Aufgaben

1. Aufgabe **[16 Punkte]**

Schreiben Sie die Lösungen **vollständig gekürzt und vereinfacht** in das jeweils vorgegebene Feld im Antwortheft. Sie brauchen **keine** Zwischenschritte oder Begründungen angeben. Antworten, die Sie woanders als in das vorgebenene Feld im Antwortheft hinschreiben, werden **nicht** gewertet.

(a) [**1 Punkt**] Sei a_n die Folge $a_n = \dfrac{3n^4 - 6n^2 + 9n - 12}{5n^4 - 10n^3 + 15n - 20}$. Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} a_n$.

(b) [**1 Punkt**] Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = \sin(\sqrt{x^3})$.

(c) [**1 Punkt**] Berechnen Sie das Integral $\int_0^1 f(x)\,dx$ der Funktion $f(x) = 3x\sqrt{1-x}$.

(d) [**2 Punkte**] Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int f(x)\,dx$ der Funktion $f(x) = \dfrac{3x-1}{x^2-2x-3}$.

(e) [**1 Punkt**] Berechnen Sie das Integral $\int_0^{\sqrt{\pi}} f(x)\,dx$ der Funktion $f(x) = x^3\sin(x^2)$.

(f) [**2 Punkte**] Finden Sie alle Parameter $a \in \mathbb{R}$ für die die Funktion $f(x) = \cos(x) - ax$ strikt monoton fallend ist. Geben Sie Ihre Antwort in der Form $r < a < s$ an mit gewissen Schranken $r, s \in [-\infty, \infty]$.

(g) [**1 Punkt**] Wie muss der Parameter $b \in \mathbb{R}$ gewählt werden (in Abhängigkeit vom Parameter $a \in \mathbb{R}$), damit die folgende Funktion im Punkt 0 stetig ist?

$$f(x) = \begin{cases} x^{-1}\sin(x^2) - a(x+1) & \text{falls } x > 0 \\ a\ln(1+x) + b & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$$

Hinweis: Es gilt $\lim_{x\to 0} x^{-1}\sin(x) = 1$.

(h) [**2 Punkte**] Wie müssen die Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit die Funktion aus Teilaufgabe (g) im Punkt 0 differenzierbar ist?

(i) [**2 Punkte**] Bestimmen Sie den zweiten und dritten Koeffizienten (also a_1 und a_2) der Taylorreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$ von $f(x) = x^2\ln(x^{-1})$ um den Punkt 1.

(j) [**1 Punkt**] Bestimmen Sie den Konvergenzradius r der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} n^{-1}2^{-n}x^n$.

(k) [**2 Punkte**] Für die Reihe aus der vorherigen Teilaufgabe mit Konvergenzradius r, geben Sie mit ja/nein an, ob die Reihe für $x = r$ oder $x = -r$ konvergiert.

2. Aufgabe **[9 Punkte]**

In dieser Aufgabe bezeichnet i die komplexe Einheit, also $i^2 = -1$. Schreiben Sie die Lösungen **vollständig gekürzt und vereinfacht** in das jeweils vorgegebene Feld im Antwortheft. Sie brauchen **keine** Zwischenschritte oder Begründungen angeben. Antworten, die Sie woanders als in das vorgebenene Feld im Antwortheft hinschreiben, werden **nicht** gewertet.

(a) [**2 Punkte**] Geben Sie die komplexen Zahlen $z_1 = 2 + (1+i)^2$ und $z_2 = \dfrac{3+2i}{3i-2}$ in Polarkoordinaten an.

(b) [**2 Punkte**] Geben Sie die komplexen Zahlen $z_1 = \dfrac{\sqrt{5}|1-2i|(2-i)}{2+i}$ und $z_2 = \dfrac{3-\sqrt{8}e^{i\pi/4}}{6+8i}$ in der Form $a + bi$ an.

(c) [**2 Punkte**] Zeichnen Sie die folgende Menge in der komplexen Ebene:

$$\{z \in \mathbb{C} \mid -4 \leq \mathrm{Re}(z) \leq \mathrm{Im}(z) \text{ und } -3 \leq \mathrm{Im}(z) \leq 1\}.$$

(d) [**3 Punkte**] Finden Sie alle komplexen Nullstellen des Polynoms $z^3 + 4z^2 + 16z + 64$. Geben Sie die Lösungen in der Form $a + bi$ an.

3. Aufgabe **[12 Punkte]**

Für die Teilaufgaben (a) und (b): Schreiben Sie die Lösungen in das jeweils vorgegebene Feld im Antwortheft. Sie brauchen **für (a) und (b) keine** Zwischenschritte oder Begründungen angeben. Antworten **zu (a) und (b)**, die Sie woanders als in das vorgebenene Feld im Antwortheft hinschreiben, werden **nicht** gewertet.

Sei A die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \mu \\ \mu & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ mit einem Parameter $\mu \in \mathbb{R}$ und sei b der Vektor $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(a) [**2 Punkte**] Bestimmen Sie alle Parameter $\mu \in \mathbb{R}$ für welche die Determinante von A gleich Null ist.

(b) [**1 Punkt**] Bestimmen Sie alle Parameter $\mu \in \mathbb{R}$ für welche die zwei Vektoren b und $A^T b$ linear abhängig sind.

(c) [**3 Punkte**] Berechnen Sie den Rang von A in Abhängigkeit von μ für alle $\mu \in \mathbb{R}$.

(d) [**2 Punkte**] Sei $\mu = 2$. Finden Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

(e) [**4 Punkte**] Finden Sie die Eigenwerte von $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ sowie zu jedem der beiden Eigenwerte einen dazugehörigen normierten Eigenvektor.

4. Aufgabe **[12 Punkte]**

Betrachten Sie die Funktion $f(x, y) = x^2y^2 + x^3 - 3x$.

(a) [**3 Punkte**] Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene des Graphen von f im Punkt $(-1, 1, 3)$.

(b) [**5 Punkte**] Finden Sie alle kritischen Punkte von f und bestimmen Sie jeweils, ob es sich um einen Sattelpunkt, ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum handelt.

(c) [**4 Punkte**] Betrachten Sie nun die Funktion f unter der Nebenbedingung $3x = y^2$. Schreiben Sie die Lagrangefunktion Λ auf und finden Sie alle kritischen Punkte von Λ.

5. Aufgabe **[12 Punkte]**

Finden Sie die Lösung folgender Anfangswertprobleme.

(a) [**4 Punkte**] $y' + 3y = 9x$ mit $y(0) = 4$.

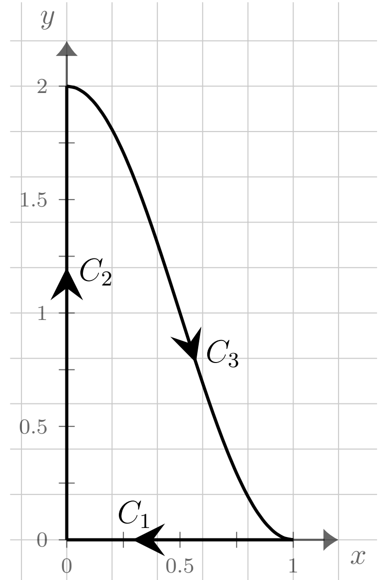
(b) [**4 Punkte**] $y'' + 4y' + 4y = -2e^{-2x}$ mit $y(0) = y'(0) = -1$.

(c) [**4 Punkte**] $2x^2y' - y^2 = x^2$ mit $y(1) = -1$.

6. Aufgabe **[10 Punkte]**

Für die Teilaufgaben (a) und (b): Schreiben Sie die Lösungen in das jeweils vorgegebene Feld im Antwortheft. Sie brauchen **für (a) und (b) keine** Zwischenschritte oder Begründungen angeben. Antworten **zu (a) und (b)**, die Sie woanders als in das vorgebenene Feld im Antwortheft hinschreiben, werden **nicht** gewertet.

In der Skizze sehen Sie drei Kurven C_1, C_2, C_3. Die Kurve C_3 ist von der Form $C_3(t) = (t, \cos(at) + b)$ für gewisse Parameter $a, b \in \mathbb{R}$. An den Endpunkten ist die Kurve C_3 flach, d.h. ihre Tangente ist dort jeweils parallel zur x-Achse.



(a) **[3 Punkte]** Finden Sie Parametrisierungen der drei Kurven. Für C_3 heisst dies, dass Sie die Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ bestimmen müssen. Beachten Sie die in der Skizze eingezeichneten Durchlaufrichtungen. Es gibt nicht nur eine Lösung.

(b) **[1 Punkte]** Sei D die Fläche, die von den drei Kurven eingeschlossen wird. Berechnen Sie den Flächeninhalt von D.

(c) **[4 Punkte]** Sei nun $\overrightarrow{F}$ das Vektorfeld $\overrightarrow{F}(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y - 1 \\ x - 2y + 2 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass

$$\int_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \frac{2}{3} \qquad \text{und} \qquad \int_{C_2} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 0 \qquad \text{und} \qquad \int_{C_3} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = -\frac{2}{3}.$$

Hinweis: Wir erinnern daran, dass $\frac{d}{dt} \sin^2(t) = 2\sin(t)\cos(t)$.

(d) **[2 Punkte]** Mit C bezeichnen wir die geschlossene Kurve, die sich ergibt indem man C_1, C_2 und C_3 nacheinander durchläuft. Berechnen Sie $\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$, indem Sie den Satz von Gauss-Green anwenden.