D–BIOL D–CHAB D–HEST

Prüfung Mathematik I/II

401-0292-00L

Lösungsvorschlag

Multiple Choice

1. Aufgabe **[40 Punkte]**

Analysis:

1.MC1 **Ergebnis:** (A).

Die Funktion $\log(y)$ ist nur für $y > 0$ definiert. Das bedeutet, dass $\log(x^3+1)$ nur für $x^3+1 > 0$ definiert ist. Zuletzt gilt

$$x^3 + 1 > 0 \iff x^3 > -1 \iff x > -1.$$

1.MC2 **Ergebnis:** (A).

Das Taylor-Polynom erster Ordnung der Funktion f an der Stelle x_0 lautet $f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$. In diesem Fall gilt

$$f(x_0) = \log(\sqrt{2}) \text{ und } f'(x_0) = \frac{1}{\sqrt{x_0}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x_0}} = \frac{1}{4}.$$

1.MC3 **Ergebnis:** (A).

Wir sind in der Situation $\frac{\infty}{\infty}$ und möchten die Regel von de l'Hôpital anwenden:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}+41x}{x^3+42x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-e^{-x}+41}{3x^2+42} = 0.$$

1.MC4 **Ergebnis:** (A).

Wenn $a = 1$ oder $a = -1$, konvergiert die Reihe nicht. Dann, wenn $a \notin \{-1, 1\}$, erhalten wir

$$\sum_{n=1}^{N} a^n = \frac{1-a^N}{1-a}.$$

Der Limes

$$I := \lim_{N\to\infty} \frac{1-a^N}{1-a}$$

existiert und ist endlich, das heisst $I \in (-\infty, \infty)$, genau dann wenn $|a| < 1$.

1.MC5 **Ergebnis:** (B).

Wir substituieren $u = x^2 + 2x + 1$. Dann gilt $\frac{du}{dx} = 2x + 2$ und somit $du = (2x + 2)\,dx$. Es folgt

$$\int \frac{2x+2}{x^2+2x+1}\mathrm{d}x = \log(x^2+2x+1) + C,$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$. Damit erhalten wir

$$\int_1^2 \frac{2x+2}{x^2+2x+1}\mathrm{d}x = \log(9) - \log(4) = \log\left(\frac{9}{4}\right).$$

Eine andere Möglichkeit wäre zu bemerken, dass

$$\frac{2x+2}{x^2+2x+1} = \frac{2(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{x+1},$$

um zu erhalten:

$$\int \frac{2}{x+1}\mathrm{d}x = 2\log(x+1) + C = \log((x+1)^2) + C = \log(x^2+2x+1) + C,$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$.

1.MC6 **Ergebnis:** (C).

Die Funktion f ist glatt und es gilt

$$f'(x) = -2\sin(x) \text{ und } f''(x) = -2\cos(x).$$

Wir sehen somit, dass f offensichtlich nicht konvex ist, da $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ nicht erfüllt ist. Ferner gilt $f'(0) = 0$ und $f''(0) = -2$, was bedeutet, dass der Punkt $x_0 = 0$ kein lokales Minimum, sondern ein lokales Maximum ist. Weiterhin gilt $f'(\pi) = 0$ und $f''(\pi) = 2$, sodass $x_0 = \pi$ ein lokales Minimum ist. Schliesslich kann der Punkt $x_0 = 0$ aufgrund von $f''(0) = -2$ kein Wendepunkt sein.

1.MC7 **Ergebnis:** (D).

Da f auf $(-2, 1)$ konkav ist, haben wir $f''(x) \leq 0$ für alle $x \in (-2, 1)$. Keine der anderen Optionen trifft zu, da f offensichtlich weder monoton noch konvex ist.

Komplexe Analysis:

1.MC8 **Ergebnis:** (B).

Es gilt

$$1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Ferner gilt

$$10\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{11\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+2\pi.$$

Das heisst $\arg(z)=\frac{3\pi}{4}$.

Lineare Algebra:

1.MC9 **Ergebnis:** (D).

Da λ ein Eigenwert ist, gilt immer $\det(A-\lambda I_{99})=0$. Keine der anderen Optionen ist immer wahr.

1.MC10 **Ergebnis:** (D).

Das charakteristische Polynom von A ist

$$\begin{aligned}p_A(\lambda)&=(1-\lambda)(-6-\lambda)-(-6)\cdot 2\\&=-6+5\lambda+\lambda^2+12\\&=\lambda^2+5\lambda+6\\&=(\lambda+2)(\lambda+3)\end{aligned}$$

und hat Nullstellen $\lambda_1=-3<-2=\lambda_2$. Ferner gilt

$$\begin{pmatrix}1&-6\\2&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9\\-6\end{pmatrix}=-3\cdot\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix}1&-6\\2&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}=-2\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}.$$

1.MC11 **Ergebnis:** (D).

Das charakteristische Polynom von B ist

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) &= (-1-\lambda)(-2-\lambda)(1-\lambda) - 3(-2-\lambda) \\ &= (-2-\lambda)\Big[(-1-\lambda)(1-\lambda) - 3\Big] \\ &= (-2-\lambda)\Big[-1+\lambda-\lambda+\lambda^2-3\Big] \\ &= (-2-\lambda)\Big[\lambda^2-4\Big]. \end{aligned}$$

Die Eigenwerte von B sind dann $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 2$. Die Determinante von B ist gleich dem Produkt der Eigenwerte, das heisst

$$\det(B) = (-2)\cdot(-2)\cdot 2 = 8 > 0,$$

was impliziert, dass B regulär ist. Die Spaltenvektoren von B sind daher linear unabhängig.

1.MC12 **Ergebnis:** (D).

Damit es zwei verschiedene Lösungen gibt, muss $\det(A_b) = 0$ gelten, also $b = 4$. Die zweite Gleichung von der zweiten Lösung ist $-3b = z$, woraus mit $b = 4$ folgt, dass $z = -12$. Alternativ kann man auch das Gleichungssystem der beiden zweiten Gleichungen $12 - 6b = z$ und $-3b = z$ auflösen.

Gewöhnliche Differentialgleichungen:

1.MC13 **Ergebnis:** (B).

Es gilt

$$\begin{aligned} & y\frac{dy}{dx} = e^{2x}dx \\ \implies & \frac{y^2}{2} = \frac{e^{2x}}{2} + C \\ \implies & y(x) = \pm\sqrt{e^{2x}+\tilde{C}}, \end{aligned}$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ und $\tilde{C} := 2C$. Wegen $y(0) = -1$ muss $\tilde{C} = 0$ und das negative Vorzeichen gewählt werden. Damit ist die Lösung des Anfangswertproblems die Funktion

$$y(x) = -\sqrt{e^{2x}} = -e^x.$$

1.MC14 **Ergebnis:** (C).

Die homogene Differentialgleichung lautet

$$y''(x) - y'(x) = 0.$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung kennen wir aus der Vorlesung, nämlich

$$y_0(x) = C_1 e^{1\cdot x} + C_2 e^{0\cdot x} = C_1 e^x + C_2,$$

für Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Multivariate Funktionen:

1.MC15 **Ergebnis:** (C).

Für diese Teilaufgabe benutzen wir implizite Differentiation. Schreiben wir die Kurve als $y(x)$, dann gilt $f(x, y(x)) = 0$. Implizite Differentation sagt uns, dass

$$y'(x) = -\frac{\partial_x f(x, y(x))}{\partial_y f(x, y(x))}.$$

Die partiellen Ableitungen von f sind

$$\partial_x f(x, y) = 2x + y \qquad \text{und} \qquad \partial_y f(x, y) = x + 2y.$$

Damit erhalten wir die Steigung der Tangente als

$$y'(-1) = -\frac{2\cdot(-1) + 2}{-1 + 2\cdot 2} = 0.$$

1.MC16 **Ergebnis:** (A).

Die (x, z)-Ebene ist gegeben durch die Gleichung $y = 0$, und die Schnittkurve mit der (x, z)-Ebene ist daher $z = f(x, 0) = e^{-2x^2}$.

Mehrdimensionale Integrale:

1.MC17 **Ergebnis:** (A).

Sei B ein einfaches Gebiet. Sein Flächeninhalt berechnet sich mit der Funktion $f(x, y) = 1$ durch

$$\iint_B 1\, dB.$$

Linienintegrale und Oberflächenintegrale:

1.MC18 **Ergebnis:** (C).

Hier müssen Sie die Durchlaufrichtung beachten. Es gilt zum Beispiel dass $\gamma_3(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0^4 \end{pmatrix}$.

1.MC19 **Ergebnis:** (A).

Nach der Definition des Wegintegrals gilt

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 -\cos(t)\sin(t) \cdot (-\sin(t)) + \cos(t)^2 \cdot \cos(t)\, dt \\
&= \int_0^1 \cos(t)\sin(t)^2 + \cos(t)^3 dt \\
&= \int_0^1 \cos(t)[\sin(t)^2 + \cos(t)^2]\, dt \\
&= \int_0^1 \cos(t)\, dt = \sin(1) - \sin(0) = \sin(1).
\end{aligned}$$

1.MC20 **Ergebnis:** (B).

Mit der Formel von Green ergibt sich

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_D \Big(\partial_x Q(x,y) - \partial_y P(x,y)\Big)\, dD \\
&= \iint_D 1 - (-1)\, \mathrm{d}D = 2 \iint_D 1\, \mathrm{d}D \\
&= 2 \cdot \text{Fläche}(D) = 2 \cdot (7^2)\pi = 98\pi.
\end{aligned}$$

Alternativ folgt das auch ohne die Formel: zum Beispiel mit der Parametrisierung

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} 3 + 7\cos(t) \\ 4 + 7\sin(t) \end{pmatrix}.$$

Aufgaben

2. Aufgabe **[4 Punkte]**

(a) [**1 Punkt**] Konvergiert die folgende Reihe? Begründen Sie Ihre Antwort!

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(\log(n))}$$

Lösung:

Die Reihe konvergiert nach dem Satz von Leibniz (Leibniz-Kriterium). Tatsächlich haben wir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log(\log(n))} = 0,$$

und die Folge

$$\left(\frac{1}{\log(\log(n))}\right)_{n=2}^{\infty}$$

ist monoton fallend.

(b) [**3 Punkte**] Finden Sie das Zentrum x_0 und den Konvergenzradius r der folgenden Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\,(3x-1)^n\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Lösung:

Es gilt

$$(n+1)\,(3x-1)^n = (n+1)3^n \left(x - \frac{1}{3}\right)^n.$$

Daher ist das Zentrum $x_0 = \frac{1}{3}$. Weiterhin gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)3^n}{(n+2)3^{n+1}} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{3}.$$

Folglich ist $r = \frac{1}{3}$. Alternativ gilt

$$\frac{1}{r} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n+1)3^n} = 3 \cdot \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 3,$$

was zum gleichen Ergebnis führt.

3. Aufgabe [4 Punkte]

(a) **[2 Punkte]** Lösen Sie die Gleichung

$$z^3 = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i,$$

und geben Sie die Lösungen in **Polardarstellung** an, das heisst entweder in trigonometrischer Darstellung $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ oder in exponentieller Darstellung $z = re^{i\varphi}$ mit jeweils $r \geq 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Lösung:

Als erstes schreiben wir z^3 in exponentieller Darstellung

$$z^3 = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i = 8e^{i\frac{\pi}{4}}$$

und suchen die Lösungen z dieser Gleichung in exponentieller Darstellung. Falls $z = re^{i\varphi}$, dann ist $z^3 = r^3e^{3i\varphi}$. Gesucht sind also $r \geq 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit

$$r^3e^{3i\varphi} = 8e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Daraus folgt $r = 2$ und dass 3φ bis auf Vielfache von 2π gleich $\frac{\pi}{4}$ ist. Das bedeutet $3\varphi = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und somit $\varphi = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k$. Setzen wir verschiedene $k \in \mathbb{Z}$ ein, sehen wir, dass die möglichen $\varphi \in [0, 2\pi)$ gleich $\frac{\pi}{12}$, $\frac{9\pi}{12}$ und $\frac{17\pi}{12}$ sind. Es folgt

$$\begin{aligned} z_1 &= 2e^{i\frac{\pi}{12}}, \\ z_2 &= 2e^{i\frac{9\pi}{12}}, \\ z_3 &= 2e^{i\frac{17\pi}{12}}. \end{aligned}$$

(b) [**2 Punkte**] Betrachten Sie die Menge

$$D = \Big\{ z \in \mathbb{C} \,|\, z \cdot \bar{z} \leq 2 \Big\}$$

in der komplexen Ebene. Seien

$$z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}, \quad z_2 = 1 - 2i.$$

Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden komplexen Zahlen in der Menge D liegen oder nicht.

(i) z_2,

(ii) $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$.

Lösung:

Eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ liegt in D, genau dann wenn

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z} \leq 2.$$

Der Betrag von z_1 ist

$$|z_1| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{6}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{8}{4}} = \sqrt{2}.$$

Der Betrag von z_2 ist

$$|z_2| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}.$$

(i) Die Zahl $z_2 \in \mathbb{C}$ liegt nicht in D, da

$$|z_2|^2 = 5.$$

(ii) Die Zahl $z_3 \in \mathbb{C}$ liegt in D, da

$$|z_3|^2 = \frac{|z_1|^2}{|z_2|^2} = \frac{2}{5} \leq 2.$$

4. Aufgabe **[4 Punkte]**

(a) [**1 Punkt**] Betrachten Sie die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rechnen Sie die Determinante von A aus.

Lösung:

Die Determinante kann zum Beispiel durch Entwickeln nach der zweiten Spalte und anschliessender Anwendung der Sarrus-Regel berechnet werden. Es folgt

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -1.$$

(b) [**3 Punkte**] Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -a \end{pmatrix}$$

und

$$b = \begin{pmatrix} 14 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Sei $x \in \mathbb{R}^3$. Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem

$$Ax = b$$

(i) keine Lösung?
(ii) genau eine Lösung?
(iii) unendlich viele Lösungen?

Lösung:

Ein lineares System $Ax = b$ ist nur lösbar, wenn A und $A|b$ vom gleichen Rang sind. Da die erste Zeile und die zweite Zeile von A linear unabhängig sind, gilt $rang(A) \geq 2$. Wir erhalten demnach

$$3 \geq rang(A|b) \geq rang(A) \geq 2.$$

Ferner gilt

$$rang(A) = 3 \iff \det(A) \neq 0$$

und

$$\det(A) = -2a + 4 - 27 - 12 + 3 + 6a = 4a - 32.$$

Sei $a \in \mathbb{R} \setminus \{8\}$, dann gilt $rang(A) = 3$ und das Gleichungssystem hat genau eine Lösung, nämlich $x = A^{-1}b$.

Sei nun $a = 8$, dann möchten wir das folgende lineare Gleichungssystem lösen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Bei der Durchführung des Gauss-Verfahrens, erhalten wir, dass dieses lineare Gleichungssystem keine Lösung besitzt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 2 & -3 & -8 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_3 - 2Z_1]{Z_2 - 3Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -4 & -8 & -32 \\ 0 & -7 & -14 & -17 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3 - \frac{7}{4}Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -4 & -8 & -32 \\ 0 & 0 & 0 & 39 \end{array}\right)$$

(i) $a = 8$,

(ii) $a \in \mathbb{R} \setminus \{8\}$,

(iii) Dieses Gleichungssystem hat nie unendlich viele Lösungen.

5. Aufgabe **[4 Punkte]**

(a) **[3 Punkte]** Sei $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq x\}$ und

$$f(x, y) = \frac{x}{y}, \quad (x, y) \in (0, \infty) \times (0, \infty).$$

Berechnen Sie den Wert des Integrals

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy.$$

Lösung:

Es gilt

$$\begin{aligned}\iint_D f(x, y)\, dx\, dy &= \int_1^2 \int_1^x \frac{x}{y}\, dy\, dx = \int_1^2 x \int_1^x \frac{1}{y}\, dy\, dx = \int_1^2 x\ [\log(y)]_1^x\ dx \\ &= \int_1^2 x \log(x)\, dx = \left[\frac{x^2}{2}\log(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\, dx = 2\log(2) - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2 \\ &= 2\log(2) - \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Alternativ gilt

$$\begin{aligned}\iint_D f(x, y)\, dx\, dy &= \int_1^2 \int_y^2 \frac{x}{y}\, dx\, dy = \int_1^2 \frac{1}{y} \int_y^2 x\, dx\, dy = \int_1^2 \frac{1}{y}\left[\frac{x^2}{2}\right]_y^2 dy \\ &= \int_1^2 \frac{1}{y}\left(2 - \frac{y^2}{2}\right) dy = \int_1^2 \frac{2}{y} - \frac{y}{2}\, dy = \left[2\log(y) - \frac{y^2}{4}\right]_1^2 \\ &= 2\log(2) - 1 - \left(0 - \frac{1}{4}\right) = 2\log(2) - \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

(b) **[1 Punkt]** Sei $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x, y) = 3x, \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$
$$\frac{\partial}{\partial y} F(x, y) = 3y + 4, \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Wir definieren

$$X(r, \theta) = r\cos(\theta), \quad (r, \theta) \in (0, \infty) \times (0, 2\pi),$$
$$Y(r, \theta) = r\sin(\theta), \quad (r, \theta) \in (0, \infty) \times (0, 2\pi).$$

Für $(r, \theta) \in (0, \infty) \times (0, 2\pi)$, berechnen Sie

$$\frac{\partial}{\partial \theta} F(X(r, \theta), Y(r, \theta)).$$

Hinweis: Sie können die Ketten-Regel verwenden.

Lösung:

Es gilt

$$\frac{\partial X}{\partial \theta}(r, \theta) = -r\sin(\theta) \quad \text{und} \quad \frac{\partial Y}{\partial \theta}(r, \theta) = r\cos(\theta).$$

Daher ergibt sich durch die Ketten-Regel

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \theta} F(X(r, \theta), Y(r, \theta)) &= \frac{\partial F}{\partial x}(X(r, \theta), Y(r, \theta)) \cdot \frac{\partial X}{\partial \theta}(r, \theta) + \frac{\partial F}{\partial y}(X(r, \theta), Y(r, \theta)) \cdot \frac{\partial Y}{\partial \theta}(r, \theta) \\
&= 3r\cos(\theta) \cdot (-r\sin(\theta)) + (3r\sin(\theta) + 4) \cdot r\cos(\theta) \\
&= 4r\cos(\theta).
\end{aligned}$$

Eine weitere korrekte Lösung besteht darin, zu erkennen, dass es notwendigerweise gilt

$$F(x, y) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 + 4y + C,$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$. Dann, wenn wir dies auf die Polarkoordinaten anwenden, erhalten wir

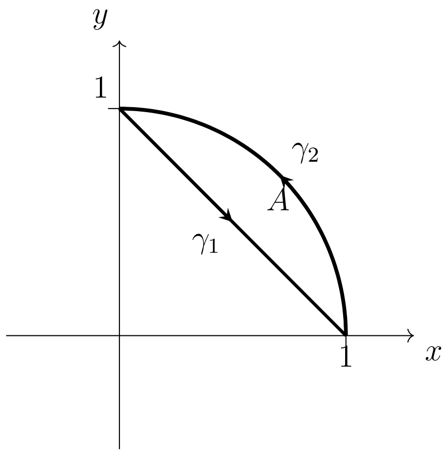
$$F(X(r, \theta), Y(r, \theta)) = 4r\sin(\theta) + C,$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$, und das führt zu

$$\frac{\partial}{\partial \theta} F(X(r, \theta), Y(r, \theta)) = 4r\cos(\theta).$$

6. Aufgabe [4 Punkte]

In folgender Skizze sehen Sie eine Fläche A in der (x, y)-Ebene, welche durch zwei ebene Kurven γ_1 und γ_2 begrenzt ist.



Dabei liegt γ_1 auf einer Gerade und γ_2 ist ein Ausschnitt der Funktion $y = \sqrt{1 - x^2}$.

(a) **[1 Punkt]** Geben Sie für γ_1 und γ_2 jeweils eine Funktion an, welche die Kurve parametrisiert. Berücksichtigen Sie dabei die Durchlaufrichtung.

Lösung:

Wir geben mögliche Parametrisierungen der Wege an. Der Weg γ_1 liegt auf der Gerade zwischen $(0, 1)$ und $(1, 0)$. Das impliziert dass

$$\gamma_1(t) = (1 - t)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1 - t \end{pmatrix},$$

für $0 \leq t \leq 1$.

Ferner gilt, dass γ_2 einen Viertelkreis mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius 1 beschreibt, das heisst

$$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix},$$

für $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Alternativ kann man auch γ_2 wie folgt beschreiben

$$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 1 - t \\ \sqrt{1 - (1 - t)^2} \end{pmatrix},$$

für $0 \leq t \leq 1$.

(b) **[3 Punkte]** Berechnen Sie das Integral

$$\oint_A y\,dx - x\,dy$$

auf zwei verschiedene Arten.

Lösung:

Es gilt

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\gamma_1} y\,dx - x\,dy \\
&= \int_0^1 (1-t)\cdot 1 - t\cdot(-1)\,dt \\
&= \int_0^1 1 - t + t\,dt \\
&= \int_0^1 1\,dt \\
&= \Big[t\Big]_0^1 \\
&= 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{\gamma_2} y\,dx - x\,dy \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\cdot(-\sin(t)) - \cos(t)\cdot\cos(t)\,dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\Big[\sin(t)^2 + \cos(t)^2\Big]\,dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -1\,dt \\
&= \Big[-t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Das impliziert

$$\oint_A y\,dx - x\,dy = \int_{\gamma_1} y\,dx - x\,dy + \int_{\gamma_2} y\,dx - x\,dy = 1 - \frac{\pi}{2}.$$

Der Satz von Green ergibt

$$\oint_A y\,dx - x\,dy = \iint_A \Big(\partial_x Q(x,y) - \partial_y P(x,y)\Big)\,dA = \iint_A (-1-1)dA = -2\iint_A 1\,dA.$$

Ferner gilt, dass $\iint_A 1\,dA$ gleich dem Flächeninhalt von A ist. Die Fläche von A ist die Differenz zwischen der Fläche vom Viertelkreis und der Fläche des Dreiecks, das heisst

$$\oint_A y\,dx - x\,dy = -2\Big[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\Big] = 1 - \frac{\pi}{2}.$$