D–BIOL D–CHAB D–HEST

Prüfung Mathematik I/II

401-0291-00L / 401-0292-00L

Prüfungsangabe

Bitte noch nicht umblättern!

Multiple Choice

1. Aufgabe **[40 Punkte]**

Kreuzen Sie auf dem Abgabeblatt Ihre Antwort an. Pro Teilaufgabe ist genau eine der Antwortmöglichkeiten richtig. Für jede richtig beantwortete Teilaufgabe erhalten Sie **2 Punkte**, sonst **0 Punkte**. Bei dieser Aufgabe müssen Sie die Antworten nicht begründen.

Analysis:

MC1. Was ist der **maximale** Definitionsbereich (Teilmenge von $\mathbb{R}$) der Funktion

$$g(x) = \log(x^3 + 1)?$$

(A) $(-1, \infty)$,
(B) $[1, \infty)$,
(C) $(-\infty, -1)$,
(D) $(-\infty, 0]$.

MC2. Was ist das Taylor-Polynom erster Ordnung der Funktion $f(x) = \log(\sqrt{x}),\ x \in (0, \infty)$, an $x_0 = 2$?

(A) $\log(\sqrt{2}) + \frac{1}{4}(x - 2)$,
(B) $2 + \log(\sqrt{2})(x - 2)$,
(C) $\log(\sqrt{2}) + \frac{1}{4}(x - 1)$,
(D) $2 + \log(\sqrt{2})x$.

MC3. Welchen Wert hat der folgende Limes?

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x} + 41x}{x^3 + 42x}$$

(A) 0,
(B) ∞,
(C) $\frac{41}{42}$,
(D) der Limes existiert nicht.

MC4. Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n$$

konvergiert genau dann, wenn

(A) $a \in (-1, 1)$,

(B) $a \in \mathbb{R}$,

(C) $a = 0$,

(D) $a \in [-1, 1]$.

MC5. Was ist der Wert des folgenden Integrals?

$$\int_1^2 \frac{2x+2}{x^2+2x+1}\, dx$$

(A) $\log(\sqrt{2})$,

(B) $\log(\frac{9}{4})$,

(C) $-\log(2)$,

(D) 2.

MC6. Sei $f(x) = 2\cos(x) + 31,\ x \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen ist **wahr**?

(A) f ist eine konvexe Funktion,

(B) $x_0 = 0$ ist ein lokales Minimum,

(C) $x_0 = \pi$ ist ein lokales Minimum,

(D) $x_0 = 0$ ist ein Wendepunkt.

MC7. Sei f eine zweimal differenzierbare Funktion deren Graph in Abbildung 1 zu sehen ist. Welche Aussage über f ist **wahr** für alle $x \in (-2, 1)$?

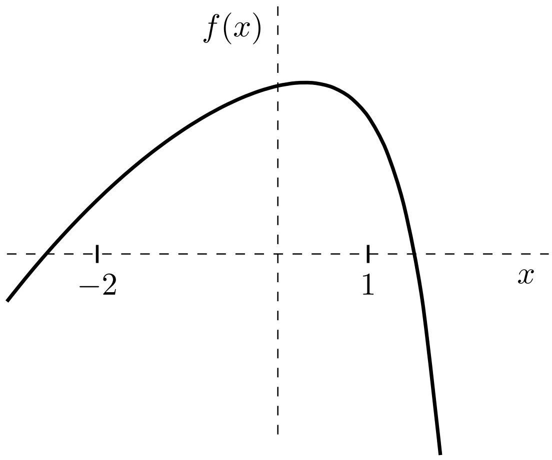


Abbildung 1: Graph der Funktion f.

(A) $f'(x) \geq 0$,
(B) $f'(x) \leq 0$,
(C) $f''(x) \geq 0$,
(D) $f''(x) \leq 0$.

Komplexe Analysis:

MC8. Sei
$$z = (1+i)^{10} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right).$$
Welchen Winkel $\arg(z)$ hat die komplexe Zahl z? (Der Winkel $\arg(z)$ wird manchmal auch als das Argument von z bezeichnet.)

(A) $\frac{\pi}{2}$,
(B) $\frac{3\pi}{4}$,
(C) $\frac{2\pi}{3}$,
(D) $\frac{\pi}{3}$.

Lineare Algebra:

MC9. Sei A eine 99×99 Matrix. Sei v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$. Welche dieser Aussagen ist **immer wahr**?

(A) $(A - \lambda I_{99})v = v$,

(B) A ist eine singuläre Matrix,

(C) $\det(A) = \lambda$,

(D) $\det(A - \lambda I_{99}) = 0$.

MC10. Betrachten Sie die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$$

Seien v_1, ein Eigenvektor von A zum kleinsten Eigenwert, und v_2, ein Eigenvektor von A zum grössten Eigenwert. Dann gilt

(A) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$,

(B) $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

(C) $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

(D) $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

MC11. Sei $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?

(A) Die Determinante von B ist gleich 8,

(B) Die Spaltenvektoren von B sind linear unabhängig,

(C) Das Produkt der Eigenwerte ist eine positive reelle Zahl,

(D) Die Matrix B ist singulär.

MC12. Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem $A_b \cdot x = \begin{pmatrix} 6 \\ z \end{pmatrix}$. Gegeben sei die Matrix

$$A_b = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 4 & b \end{pmatrix},$$

mit $b \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie b und z so, dass sowohl $\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ als auch $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ eine Lösung x des Gleichungssystems sind.

(A) $b = 2$ und $z = -4$,
(B) $b = 4$ und $z = -4$,
(C) $b = 2$ und $z = -12$,
(D) $b = 4$ und $z = -12$.

Gewöhnliche Differentialgleichungen:

MC13. Welche ist die Lösung der Differentialgleichung

$$y(x)y'(x) = e^{2x}$$

unter der Anfangsbedingung $y(0) = -1$?

(A) $y(x) = e^x - 2$,
(B) $y(x) = -e^x$,
(C) $y(x) = -e^{-x}$,
(D) $y(x) = -e^{-2x}$.

MC14. Betrachten Sie die folgende Differentialgleichung

$$y''(x) = y'(x) + x^2.$$

Was ist die Lösung der zugehörigen homegenen linearen Differentialgleichung?

(A) $y_0(x) = Cx^2$, für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$,
(B) $y_0(x) = Ce^x$, für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$,
(C) $y_0(x) = C_1 e^x + C_2$, für Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$,
(D) $y_0(x) = C_1 e^x + C_2 x^3 + C_3 x^2 + C_4 x$, für Konstanten $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$.

Multivariate Funktionen:

MC15. Betrachten Sie die Funktion $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3$ und die Kurve in der (x, y)-Ebene gegeben durch $f(x, y) = 0$. Bestimmen Sie die Steigung der Tangente der Kurve im Punkt $(-1, 2)$.

(A) -1,

(B) $-\frac{1}{2}$,

(C) 0,

(D) 1.

MC16. Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) = e^{-(2x^2+y^2)}, \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Was ist die Schnittkurve des Schnitts mit der (x, z)-Ebene?

(A) $z = e^{-2x^2}$,

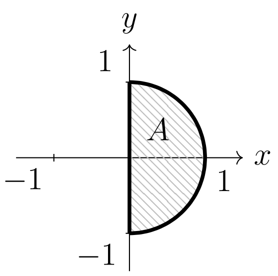
(B) $z = e^{-y^2}$,

(C) $z = e^{2x^2+y^2}$,

(D) $z = e^{-2x^2-y^2}$.

Mehrdimensionale Integrale:

MC17. Die Fläche A sei die rechte Hälfte der Kreisscheibe um Null mit Radius $R = 1$.



Welche der folgenden Integrale berechnen den Flächeninhalt von A?

(A) $\iint_A 1 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$ mit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$,

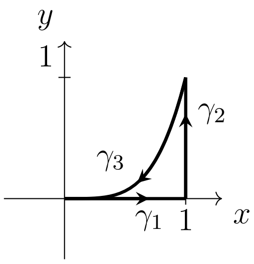
(B) $\iint_A x \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$ mit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$,

(C) $\iint_A y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$ mit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$,

(D) $\iint_A xy \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$ mit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$.

Linienintegrale und Oberflächenintegrale:

MC18. Gegeben sind die Wege γ_1, γ_2 und γ_3. Hierbei sind γ_1 und γ_2 geradlinig, γ_3 folgt dem Verlauf des Graphen der Funktion $x \mapsto x^4$ auf dem Intervall $[0, 1]$.



Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?

(A) $\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $0 \leq t \leq 1$,

(B) $\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ mit $0 \leq t \leq 1$,

(C) $\gamma_3(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^4 \end{pmatrix}$ mit $0 \leq t \leq 1$.

MC19. Sei $\vec{F} = \begin{pmatrix} -xy \\ x^2 \end{pmatrix}$ und $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ der Weg $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$. Was ist der Wert des Wegintegrals

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}\,?$$

(A) $\sin(1)$,

(B) $\sin(1) + 1$,

(C) $-\sin(1)$,

(D) $-\sin(1) + 1$.

MC20. Seien D die Kreisscheibe mit Radius 7 und Mittelpunkt $M(3, 4)$, und $\gamma = \partial D$ die (Rand-)Kreislinie im Gegenuhrzeigersinn orientiert. Für das Vektorfeld $\vec{F}$ mit $\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ gilt $\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \ldots$

(A) 0,

(B) 98π,

(C) 196π,

(D) 294π.

2. Aufgabe **[4 Punkte]**

Um die volle Punktzahl zu erreichen, schreiben Sie stets **alle Zwischenschritte sowie Begründungen** auf und vereinfachen Sie die Resultate so weit wie möglich.

(a) [**1 Punkt**] Konvergiert die folgende Reihe? Begründen Sie Ihre Antwort!

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(\log(n))}$$

(b) [**3 Punkte**] Finden Sie das Zentrum x_0 und den Konvergenzradius r der folgenden Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\,(3x-1)^n\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

3. Aufgabe **[4 Punkte]**

Um die volle Punktzahl zu erreichen, schreiben Sie stets **alle Zwischenschritte sowie Begründungen** auf und vereinfachen Sie die Resultate so weit wie möglich.

In dieser Aufgabe bezeichnet i die komplexe Einheit, also $i^2 = -1$, und $\bar{z}$ ist die komplex konjugierte Zahl von $z \in \mathbb{C}$.

(a) [**2 Punkte**] Lösen Sie die Gleichung

$$z^3 = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i,$$

und geben Sie die Lösungen in **Polardarstellung** an, das heisst entweder in trigonometrischer Darstellung $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ oder in exponentieller Darstellung $z = re^{i\varphi}$ mit jeweils $r \geq 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$.

(b) [**2 Punkte**] Betrachten Sie die Menge

$$D = \Big\{ z \in \mathbb{C} \mid z \cdot \bar{z} \leq 2 \Big\}$$

in der komplexen Ebene. Seien

$$z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}, \quad z_2 = 1 - 2i.$$

Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden komplexen Zahlen in der Menge D liegen oder nicht.

(i) z_2,

(ii) $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$.

4. Aufgabe **[4 Punkte]**

Um die volle Punktzahl zu erreichen, schreiben Sie stets **alle Zwischenschritte sowie Begründungen** auf und vereinfachen Sie die Resultate so weit wie möglich.

(a) **[1 Punkt]** Betrachten Sie die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rechnen Sie die Determinante von A aus.

(b) **[3 Punkte]** Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -a \end{pmatrix}$$

und

$$b = \begin{pmatrix} 14 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Sei $x \in \mathbb{R}^3$. Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem

$$Ax = b$$

(i) keine Lösung?
(ii) genau eine Lösung?
(iii) unendlich viele Lösungen?

5. Aufgabe **[4 Punkte]**

Um die volle Punktzahl zu erreichen, schreiben Sie stets **alle Zwischenschritte sowie Begründungen** auf und vereinfachen Sie die Resultate so weit wie möglich.

(a) [**3 Punkte**] Sei $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq x\}$ und

$$f(x, y) = \frac{x}{y}, \quad (x, y) \in (0, \infty) \times (0, \infty).$$

Berechnen Sie den Wert des Integrals

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy.$$

(b) [**1 Punkt**] Sei $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x, y) = 3x, \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$
$$\frac{\partial}{\partial y} F(x, y) = 3y + 4, \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Wir definieren

$$X(r, \theta) = r\cos(\theta), \quad (r, \theta) \in (0, \infty) \times (0, 2\pi),$$
$$Y(r, \theta) = r\sin(\theta), \quad (r, \theta) \in (0, \infty) \times (0, 2\pi).$$

Für $(r, \theta) \in (0, \infty) \times (0, 2\pi)$, berechnen Sie

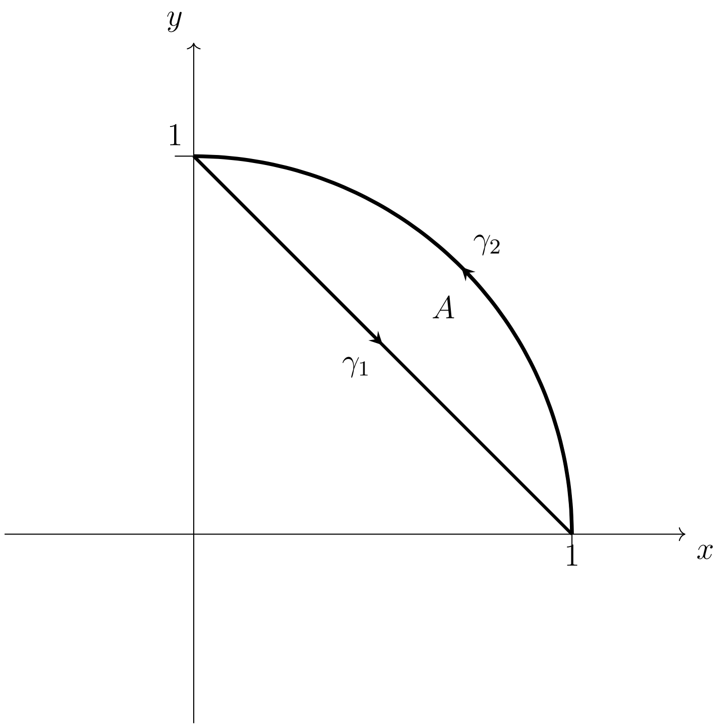
$$\frac{\partial}{\partial \theta} F(X(r, \theta), Y(r, \theta)).$$

Hinweis: Sie können die Ketten-Regel verwenden.

6. Aufgabe **[4 Punkte]**

Um die volle Punktzahl zu erreichen, schreiben Sie stets **alle Zwischenschritte sowie Begründungen** auf und vereinfachen Sie die Resultate so weit wie möglich.

In folgender Skizze sehen Sie eine Fläche A in der (x, y)-Ebene, welche durch zwei ebene Kurven γ_1 und γ_2 begrenzt ist.



Dabei liegt γ_1 auf einer Gerade und γ_2 ist ein Ausschnitt der Funktion $y = \sqrt{1 - x^2}$.

(a) **[1 Punkt]** Geben Sie für γ_1 und γ_2 jeweils eine Funktion an, welche die Kurve parametrisiert. Berücksichtigen Sie dabei die Durchlaufrichtung.

(b) **[3 Punkte]** Berechnen Sie das Integral

$$\oint_A y\,dx - x\,dy$$

auf zwei verschiedene Arten.