Prof. Dr. E. W. Farkas **ETH Zürich, Februar 2010**

D–BIOL, D–CHAB

Lösungen zu Mathematik I/II

Aufgaben

---

1. (*10 Punkte*)

a) 0.

b) 0.

c) 1.

d) $x + \frac{1}{2}x^2$.

e) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

f) $f^{-1}(y) = (y-5)^{1/4}$, Definitionsbereich $[5, \infty)$.

g) $\{0, 1, -2\}$.

h) $3e^{-2x}$.

i) $1/2$.

2. (*10 Punkte*)

a) Wir haben

$$\begin{aligned} w &= 1 - i\pi \\ \bar{w} &= 1 + i\pi \\ e^w &= e \cdot e^{-i\pi} = -e, \end{aligned}$$

so dass $z = \dfrac{(1+i\pi)(i\pi)}{-e\pi} = -\dfrac{i\pi - \pi^2}{e\pi} = \dfrac{\pi}{e} - i\dfrac{1}{e}$.

b) $z = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{1+i}} = \dfrac{1+i}{2+i} = \dfrac{1+i}{2+i} \cdot \dfrac{2-i}{2-i} = \dfrac{3+i}{5} = \dfrac{3}{5} + i\dfrac{1}{5}$.

c) Wir haben

$$\frac{1-3i}{1+3i} = \frac{1-3i}{1+3i} \cdot \frac{1-3i}{1-3i} = \frac{1-i6-9}{10} = -\frac{4}{5} - i\frac{3}{5}.$$

So dass

$$z^2 = -\frac{4}{5} - i\frac{3}{5} - \frac{1}{5} + i\frac{3}{5} = -1 \Longleftrightarrow z_{1,2} = \pm i.$$

d) $z = \left(\frac{2-i}{1+2i} \cdot \frac{1-2i}{1-2i}\right)^{11} = \left(\frac{2-4i-i-2}{5}\right)^{11} = (-i)^{11} = i.$

Wir haben

$$\begin{aligned} (1-i\sqrt{3})^3 &= 2^3 \cdot e^{-i\frac{\pi}{3}3} = -2^3 \\ (-2+2i)^4 &= 2^6 e^{i\frac{3\pi}{4}4} = -2^6 \end{aligned}$$

so dass $w = \frac{2^3}{2^6} = 2^{-3}$.

e) Wir haben

$$\begin{aligned} z_1 &= 4\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 4e^{i\frac{5\pi}{6}} \\ z_2 &= 1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \end{aligned}$$

so dass $\frac{z_1}{z_2} = 2e^{i(\frac{5}{6}\pi - \frac{\pi}{3})} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$.
Deshalb erhalten wir $|z| = 2$ und $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$.

3. (*10 Punkte*)

a) Entscheiden Sie ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

1. richtig
2. falsch
3. richtig
4. falsch

b)

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} = x^2 - 2x + 1 = 1.$$

Somit ist $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$.

c)

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

d) Berechnen Sie alle Eigenwerte von

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^3 - (1-\lambda) = 0.$$

Somit gilt $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$

4. (*10 Punkte*)

a) Das charakteristische Polynom ist $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = (\lambda - 1)(\lambda + 3)$ mit Nullstellen bei $\lambda = 1$ und $\lambda = -3$. Daher ist die allgemeine Lösung

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-3t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},\, t \in \mathbb{R}.$$

b) (i) Die Ableitugen $\dot{x}_H$ und $\ddot{x}_H$ sind durch

$$\begin{aligned} \dot{x}_H &= c_1 3e^{3t} + 3c_2 te^{3t} + c_2 e^{3t}, \\ \ddot{x}_H &= c_1 9e^{3t} + 9c_2 te^{3t} + 6c_2 e^{3t}, \end{aligned}$$

gegeben. Daraus folgt durch Einsetzen

$$\ddot{x}_H - 6\dot{x}_H + 9x_H = 0.$$

(ii) Wir verwenden den Ansatz $x_P(t) = ct^2 e^{3t}$, $c \in \mathbb{R}$. Durch Einsetzen erhalten wir

$$\begin{aligned} &\ddot{x}_P(t) - 6\dot{x}_P(t) + 9x_P \\ &\qquad = 9ct^2e^{3t} + 12cte^{3t} + 2ce^{3t} - 18t^2e^{3t} - 12cte^{3t} + 9ct^2e^{3t} = 2ce^{3t} \end{aligned}$$

und somit $c = 1$. Eine partikuläre Lösung ist also gegeben durch

$$x_P(t) = t^2 e^{3t}.$$

(iii) Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist laut (i) und (ii)

$$x(t) = c_1 e^{3t} + c_2 te^{3t} + t^2 e^{3t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},\, t \in [1, \infty).$$

Die Bedingung $x(1) = -e^3$ liefert $c_1 + c_2 + 1 = -1$, während wir aus der Bedingung $\dot{x}(1) = -6e^3$ die Gleichung $3c_1 + 4c_2 + 5 = -6$ erhalten. Somit gilt $c_1 = 3$ und $c_2 = -5$. Die gesuchte Lösung ist also

$$x(t) = 3e^{3t} - 5te^{3t} + t^2 e^{3t}, \quad t \in [1, \infty).$$

Falls Sie (ii) nicht gelöst haben und dem Hinweis folgen, so lautet die allgemeine Lösung

$$x(t) = c_1 e^{3t} + c_2 te^{3t} - e^{3t} \ln(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},\, t \in [1, \infty).$$

Die Bedingung $x(1) = -e^3$ liefert $c_1 + c_2 = -1$, während wir aus der Bedingung $\dot{x}(1) = -6e^3$ die Gleichung $3c_1 + 4c_2 - 1 = -6$ erhalten. Somit gilt $c_1 = 1$ und $c_2 = -2$. Die gesuchte Lösung ist also

$$x(t) = e^{3t} - 2te^{3t} - e^{3t} \ln(t), \quad t \in [1, \infty).$$

5. (*10 Punkte*)

a) Der Gradient von f ist

$$\nabla f(x,y) \quad = \quad \left((-2x-y)e^{-x^2-xy-y^2}, (-2y-x)e^{-x^2-xy-y^2}\right)$$

Die Nullstellen des Gradienten liegen bei

$$\boxed{u = (0,0)}$$

Die Hesse-Matrix von f lautet:

$$H_f(x,y) \quad = \quad \begin{pmatrix} (-2+(2x+y)^2)e^{-x^2-xy-y^2} & (-1+(2x+y)(2y+x))e^{-x^2-xy-y^2} \\ (-1+(2x+y)(2y+x))e^{-x^2-xy-y^2} & (-2+(2y+x)^2)e^{-x^2-xy-y^2} \end{pmatrix}$$

Somit erhalten wir für u:

$$\boxed{H_f(u) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}$$

Die Hesse-Matrix in u ist negativ definit und somit liegt ein lokales Maximum vor.

b) Define

$$L(x,y,\lambda) = xy + \lambda(x^2+y^2-x-\frac{1}{2})$$

We have

$$L_x = y + \lambda(2x-1) = 0 \tag{1}$$

$$L_y = x + 2\lambda y = 0 \tag{2}$$

$$L_\lambda = x^2+y^2-x-\frac{1}{2} = 0 \tag{3}$$

By (2) we get (assuming that $x \neq 0$)

$$\lambda = -\frac{x}{2y}$$

and by plugging it into (1) we get

$$y - \frac{x(2x-1)}{2y} = 0$$

this implies (assuming that $y \neq 0$)

$$2y^2 = 2x^2 - x,$$

that is

$$y^2 = x^2 - \frac{1}{2}x \tag{4}$$

and by plugging it into (3) we get

$$2x^2 - 1\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0,$$

that is

$$4x^2 - 3x - 1 = 0,$$

which has two solutions

$$x_1 = 1 \quad x_2 = -\frac{1}{4}$$

Now, to find y_1 and y_2 we plug x_1 and x_2 into (4)

$$y_1^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \qquad \rightarrow \qquad y_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad y_{12} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y_2^2 = \frac{1}{4^2} + \frac{1}{8} = \frac{3}{16} \qquad \rightarrow \qquad y_{21} = \frac{\sqrt{3}}{4} \qquad y_{22} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

We also need to check the cases $x = 0$ and $y = 0$:

(i) $x = 0$. We have by (1) and (2) that $y = \lambda$ and $2\lambda y = 0$, this implies that $y = 0$. But, by (3) we also have $y^2 = \frac{1}{2}$, this is a contracdiction and therefore there are no additional extremum points in this case.

(ii) $y = 0$. By (2) we get $x = 0$, but by (3) we must have $x^2 - x - \frac{1}{2} = 0$, this is a contracdiction and therefore there are no additional extremum points in this case.
Therefore, the extremum points are

$$\boxed{(1, \frac{1}{\sqrt{2}})}$$

$$\boxed{(1, -\frac{1}{\sqrt{2}})}$$

$$\boxed{(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})}$$

$$\boxed{(-\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4})}$$

6. (*5 Punkte*)

a) Einheitskreis, positiv orientiert.

b) Mit der Substitution $x = \cos t, dx = -\sin t dt$ und $y = \sin t, dy = \cos t dt$ folgt

$$
\begin{aligned}
I = \int_\gamma y\,dx + 2x\,dy &= \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t + 2\cos^2 t) dt \\
&= \int_0^{2\pi} (3\cos^2 t - 1) dt \\
&= 3\int_0^{2\pi} \cos^2 t dt + \int_0^{2\pi} dt \\
&= 3\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right)\Big|_0^{2\pi} - 2\pi \\
&= 3\pi - 2\pi = \pi.
\end{aligned}
$$

c) Aus dem Satz von Green folgt

$$
I = \int_\gamma y\,dx + 2x\,dy = \int\int (2-1) dxdy = \int\int dxdy = \pi.
$$