Prof. Dr. E. W. Farkas **ETH Zürich, Februar 2010**

D–BIOL, D–CHAB

Prüfung zur Vorlesung Mathematik I/II

Bitte ausfüllen!

Name:	
Vorname:	

Bitte nicht ausfüllen!

Aufgabe	Punkte	Kontrolle
1		
2		
3		
4		
5		
6		
Total		

Vollständigkeit	

Hinweise zur Prüfung

Prüfungsdauer: 3 Stunden.

Hilfsmittel: Aufzeichnungen im Umfang von 20 Seiten A4.

Bitte beachten Sie folgende Punkte:

- Tragen Sie **jetzt** Ihren Namen in das Deckblatt ein und geben Sie es **am Ende** der Prüfung als vorderstes Blatt Ihrer Arbeit ab.
- Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- Begründen Sie Ihre Lösungen. Dabei können bekannte Formeln aus der Vorlesung und den Übungen ohne Herleitung verwendet werden.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift, rotem oder grünem Kugelschreiber.
- Die Reihenfolge der Bearbeitung der Aufgaben ist Ihnen freigestellt.
- Wir erwarten nicht, dass Sie alle Aufgaben lösen. Tun Sie einfach Ihr Bestes! Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet.

Viel Erfolg!

Aufgaben

---

1. (*10 Punkte*)

Die Antworten in dieser Aufgabe müssen *nicht* begründet werden. Schreiben Sie die Resultate direkt *auf das Aufgabenblatt* und vereinfachen Sie so weit wie möglich.

a) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + 2 + x^{-1}}{2x^5 + x^4 + x^2} = \underline{\qquad}.$$

b) Berechnen Sie

$$\lim_{x\downarrow 0} x \log(x) = \underline{\qquad}.$$

c) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = \underline{\qquad}.$$

d) Das Taylorpolynom zweiter Ordnung der Funktion

$$f(x) = (1+x)\log(1+x)$$

(im Punkt $x_0 = 0$) ist gegeben durch $\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$.

e) Die Hesse-Matrix der Funktion

$$f(x,y) = x^2 e^y$$

im Punkt $(0,0)$ ist gegeben durch $H(0,0) = \underline{\qquad\qquad\qquad}$.

f) Gegeben sei die Funktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 + 5$. Dann ist die Umkehrfunktion f^{-1} gegeben durch

$$f^{-1}(y) = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

und der Definitionsbereich von f^{-1} ist $\underline{\qquad\qquad\qquad}$.

g) Die Menge der Nullstellen der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$, ist gegeben durch $\{\underline{\qquad\qquad\qquad}\}$.

h) Die Lösung der Differentialgleichung

$$f'(x) = -2f(x), \quad f(0) = 3$$

ist gegeben durch $f(x) = \underline{\qquad\qquad\qquad}$.

i) Berechnen Sie das folgende bestimmte Integral

$$\int_{-1}^{1} |x|^3 \, dx = \underline{\qquad\qquad}.$$

2. (*10 Punkte*)

Aufgaben **2. a)** – **e)** müssen nicht begründet werden. Schreiben Sie die Antworten zu diesen Teilaufgaben vollständig gekürzt (!) auf das Aufgabenblatt.

a) Gegeben ist die komplexe Zahl $w = 1 - i\pi$. Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von $z = \dfrac{\bar{w}(1-w)}{\pi e^w}$.

$$\mathrm{Re}(z) = \_\_\_\_\_\_\_\_ \,,\quad \mathrm{Im}(z) = \_\_\_\_\_\_\_\_ \,.$$

b) Schreiben Sie die Zahl $z = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{1+i}}$ in der Form $a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$:

$$z = \_\_\_\_\_\_\_\_ + i\_\_\_\_\_\_\_\_ \,.$$

c) Bestimmen Sie die Lösungen von

$$z^2 = \frac{1-3i}{1+3i} - \frac{1}{5} + \frac{3i}{5}.$$

$$z_1 = \_\_\_\_\_\_\_\_ \,,\quad z_2 = \_\_\_\_\_\_\_\_ \,.$$

d) Berechnen Sie die Potenzen.

$$z = \left(\frac{2-i}{1+2i}\right)^{11} = \_\_\_\_\_\_\_\_, \qquad w = \frac{(1-i\sqrt{3})^3}{(-2+2i)^4} = \_\_\_\_\_\_\_\_ \,.$$

e) Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = 4\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$ und $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$. Berechnen Sie den Betrag und das Argument von $z = \frac{z_1}{z_2}$.

$$|z| = \_\_\_\_\_\_\_\_ \,,\quad \arg(z) = \_\_\_\_\_\_\_\_ \,.$$

3. (*10 Punkte*)

a) Die Antworten in dieser Teilaufgabe müssen *nicht* begründet werden. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind und kreuzen Sie die entsprechende Antwort direkt *auf dem Aufgabenblatt* an.

- Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

hat Determinante $\det(A) = 0$.

☐ richtig

☐ falsch

- Jede 2×2-Matrix hat 2 verschiedene Eigenwerte.

☐ richtig

☐ falsch

- Jede Matrix B mit $\det(B) = 0$ hat mindestens einen Eigenwert $\lambda = 0$.

☐ richtig

☐ falsch

- Jedes lineare Gleichungssystem mit mehr Gleichungen als Unbekannten hat keine Lösung.

☐ richtig

☐ falsch

b) Finden Sie alle $x \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} = 1.$$

c) Sei

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie C^{-1}.

d) Berechnen Sie alle Eigenwerte von

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. (*10 Punkte*)

a) Man bestimme die allgemeine Lösung $x(t)$ der Differentialgleichung

$$\ddot{x} + 2\dot{x} - 3x = 0.$$

b) Man betrachte für $t \in [1, \infty)$ die inhomogene Differentialgleichung

$$\ddot{x} - 6\dot{x} + 9x = 2e^{3t}. \qquad (*)$$

(i) Verifizieren Sie, dass die allgemeine Lösung der *homogenen* Gleichung von $(*)$ durch

$$x_H(t) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

gegeben ist.

(ii) Finden Sie eine partikuläre Lösung von $(*)$.
Hinweis: Verwenden Sie den Ansatz $x_P(t) = At^2e^{3t}$, $A \in \mathbb{R}$.

(iii) Lösen Sie das Anfangswertproblem für $(*)$ unter der Anfangsbedingung $x(1) = -e^3$, $\dot{x}(1) = -6e^3$.
Hinweis: Falls Sie Teil (ii) nicht gelöst haben, so können Sie annehmen, dass $x_P(t) = -e^{3t}\ln(t)$ eine partikuläre Lösung sei.

5. (*10 Punkte*)

a) Bestimmen Sie die kritischen Punkte der Funktion

$$f(x,y) = e^{-x^2-xy-y^2}$$

und geben Sie jeweils an, ob es sich um ein lokales Minimum, lokales Maximum oder um einen Sattelpunkt handelt.

b) Bestimmen Sie die Extrema der Funktion

$$f(x,y) = xy$$

unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = x + \frac{1}{2}$.

6. (*5 Punkte*)
In der Ebene $\mathbb{R}^2$ sei der durch

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad \text{für } 0 \leq t \leq 2\pi$$

parametrisierte Weg γ gegeben.

a) Stellen Sie den Weg γ graphisch dar, indem Sie diesen in ein Koordinatensystem einzeichnen. Geben Sie auch die Richtung an.

b) Berechnen Sie das folgende Linienintegral direkt mit Hilfe der Parametrisierung des Weges:

$$I \quad = \quad \int_\gamma y\,dx + 2x\,dy,$$

c) Berechnen Sie das Linienintegral I mit Hilfe des Satzes von Green.