Prof. Dr. E. W. Farkas **ETH Zürich, Februar 2011**

D–BIOL, D–CHAB

Lösungen zu Mathematik I/II

Aufgaben

---

1. (*10 Punkte*)

a) Wir berechnen

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+2x+1}{2x^4+x^3+x^2}=\frac{1}{2}.$$

b) Wir benutzen L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin(x)}\overset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos(x)}=2.$$

c) Das Taylorpolynom erster Ordnung der Funktion

$$f(x)=xe^{(x-1)^2}$$

(im Punkt $x_0=1$) ist gegeben durch

$$T_1(x)=1+(x-1)=x.$$

d) Offensichtlich ist $x^2-4=(x+2)(x-2)$ und

$$\frac{x+1}{x^2-4}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-2},\ \text{genau wenn } A=1/4 \text{ und } B=3/4.$$

Dann folgt mit Partialbruchzerlegung

$$\int\frac{x+1}{x^2-4}dx=\frac{1}{4}\int\frac{1}{x+2}+\frac{3}{x-2}dx=\frac{1}{4}\Big\{\log(|x+2|)+3\log(|x-2|)\Big\}+C.$$

Für das bestimmte Integral folgt mit dem Hauptsatz der Differential-und Integralrechnung

$$\int_0^1\frac{x+1}{x^2-4}dx=\frac{1}{4}\Big\{\log(3)-\log(2)-3\log(2)\Big\}=\frac{1}{4}\log\left(\frac{3}{16}\right).$$

e) Damit f in $x_0 = 2$ stetig ist, muss $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$ gelten. Wir haben

$$\lim_{x\to 2} cx + 2 = 2c + 2 \overset{!}{=} f(2) = 4,$$

also folgt

$$c = 1.$$

f) Mit einer Substitution $u = x + 1$ und $du = dx$ finden wir

$$\int \frac{1}{(x+1)^3} dx = \int u^{-3} du = \frac{-1}{2} u^{-2} + C = -\frac{1}{2(x+1)^2} + C.$$

g) Wir benutzen $f(x) = 3^x = e^{\log(3^x)} = e^{x\log(3)}$ und somit folgt mit der Kettenregel

$$f'(x) = e^{x\log 3} \log(3) = 3^x \log(3).$$

h) Wir betrachten die Ungleichung $f'(x) \geq 0$. Mit $f'(x) = \frac{2xe^x - x^2 e^x}{e^{2x}}$ folgt $2xe^x - x^2 e^x \geq 0$, also

$$x^2 - 2x \leq 0$$

und somit

$$I = [0, 2].$$

2. (*10 Punkte*)

a) Wir haben $|zw| = |z||w|$.

b) Wir haben

$$|z| = 2\sqrt{2}\ ,$$

da

$$\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right) + \left(\sqrt{3}-1\right)^2} = \sqrt{1 + 2\sqrt{3} + 3 + 3 - 2\sqrt{3} + 1} = 2\sqrt{2}.$$

c) $e^i = \cos(1) + i\sin(1)$. Deshalb erhalten wir $Re\,(z) = \cos(1)$ und $Im\,(z) = \sin(1)$.

d) Wir haben

$$e^{i\pi} = -1,$$

und daher

$$z = \frac{5e^{i\pi} + 3i}{2 + 4i} = \frac{(-5+3i)(2-4i)}{20} = \frac{-10 + 26i + 12}{20}.$$

Deshalb erhalten wir $z = \frac{1}{10} + \frac{13}{10} i$.

e)

$$\begin{aligned}\left(1+\sqrt{3}i\right)^9 &= 2^9\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) && (1)\\ &= 2^9 e^{i\frac{\pi}{3}9} = 2^9 e^{3\pi i} = -2^9. && (2)\end{aligned}$$

f) Wir haben

$$2\,(i-1) = 2\frac{2}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}i-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2^{\frac{3}{2}}e^{i\frac{3}{4}\pi}.$$

Deshalb

$$|z^3| = 2^{\frac{3}{2}} \text{ und } arg\left(z^3\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) = (1+i)\\ z_2 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{1}{3}\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi\right)+i\sin\frac{1}{3}\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)\\ z_3 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{1}{3}\left(\frac{3\pi}{4}+4\pi\right)+i\sin\frac{1}{3}\left(\frac{3\pi}{4}+4\pi\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right)\end{aligned}$$

3. (*10 Punkte*)

a) Entscheiden Sie ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

1. richtig (aus $Ax = \lambda x$ folgt $\frac{1}{\lambda}x = A^{-1}x$)
2. richtig $\left(\text{zum Eigenwert 2, denn es ist } \begin{pmatrix}2 & 5\\ 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}\right)$
3. falsch ($\det(A) = 0$)
4. richtig (die Determinante der Matrix ist ungleich 0)

b) Multiplizieren der ersten Zeile von A mit der ersten Spalte von B muss 1 ergeben, daraus folgt $x_1 = 1$, das selbe macht man mit der dritten Zeile von A und der dritten Spalte von B um $x_2 = -1$ zu erhalten. (Durch Multiplizieren der beiden Matrizen sieht man, dass die so errechnete Matrix B tatsächlich zu A invers ist.)

c) $\det(A) = \begin{vmatrix}1 & -2 & 0\\ 4 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{vmatrix} = 26.$

$\det(A_1) = \begin{vmatrix}-3 & -2 & 0\\ 9 & 1 & 1\\ 11 & 1 & 3\end{vmatrix} = 26$, d.h $x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{26}{26} = 1.$

$\det(A_2) = \begin{vmatrix}1 & -3 & 0\\ 4 & 9 & 1\\ 0 & 11 & 3\end{vmatrix} = 52$, d.h $x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{52}{26} = 2.$

$$\det(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 4 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 11 \end{vmatrix} = 78, \text{ d.h } x_3 = \tfrac{\det(A_3)}{\det(A)} = \tfrac{78}{26} = 3.$$

d) $\det(A - 5I) = \begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$, also ist 5 Eigenwert von A. Die zugehörigen Eigenvektoren erhält man durch Lösen des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dazu setzen wir $x_3 = a \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$), aus der letzten Zeile ergibt sich dann zwingend $2x_1 - x_3 = 0$ und somit $x_1 = \frac{1}{2}x_3 = \frac{1}{2}a$, aus der ersten Zeile $-4x_1 + 3x_2 + x_3 = 0$, also $3x_2 = 4x_1 - x_3 = 2a - a = a$, d.h. $x_2 = \frac{1}{3}a$. Die Lösungsschar ist somit gegeben durch $\left\{ a \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\}$.

4. (*10 Punkte*)

a) Durch Trennung der Variablen erhält man

$$\sin(y(x)) = \frac{x^2}{2} + c.$$

Da

$$\sin(y(0)) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1,$$

folgt $c = -1$. Die Lösung lautet daher

$$y(x) = \arcsin\left(\frac{x^2}{2} - 1\right).$$

Da der Definitionsbereich von arcsin das Intervall $[-1, 1]$ ist, gilt $-2 \leq x \leq 2$.

b) Das charakteristische Polynom ist $\lambda^2 + 4\lambda + 5$ mit Nullstellen bei $\lambda = -2 + i$ und $\lambda = -2 - i$. Daher ist die allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1 e^{-2x} \cos x + c_2 e^{-2x} \sin x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Für $x \to \infty$, gilt $y(x) \to 0$.

c) Wir verwenden den Ansatz $y(x) = c$ für $c \in \mathbb{R}$ und wir erhalten $5c = 5$ und somit $c = 1$. Eine partikuläre Lösung ist also gegeben durch $y_{part} = 1$.

d) Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung lautet

$$y(x) = 1 + c_1 e^{-2x} \cos x + c_2 e^{-2x} \sin x.$$

Einsetzen der Anfangswertbedingungen ergibt $c_1 = 0$ und $c_2 = -1$. Falls mit folgender Lösung

$$y_H(x) = 2 + c_1 e^{-x} \cos x + c_2 e^{-x} \sin x$$

gerechnet wird, bekommt man $c_1 = -1$ und $c_2 = -2$.

5. (*7 Punkte*)

a) Der Gradient von f ist

$$\nabla f(x,y) \quad = \quad (e^y(2x+y), e^y(x^2+xy+x+2)).$$

Die notwendigen Bedingungen für kritische Punkte sind

$$\begin{aligned} e^y(2x+y) &= 0 \\ e^y(x^2+xy+x+2) &= 0. \end{aligned}$$

Weil e^y immer positiv ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} 2x+y &= 0 \\ x^2+xy+x+2 &= 0. \end{aligned}$$

Die Nullstellen liegen bei

$$\boxed{u_1 = (2,-4) \quad \text{und} \quad u_2 = (-1,2).}$$

Die Hesse-Matrix von f lautet

$$H_f(x,y) \quad = \quad \begin{pmatrix} 2e^y & e^y(2x+y+1) \\ e^y(2x+y+1) & e^y(x^2+(y+2)x+2) \end{pmatrix}$$

Somit erhalten wir für u_1 und u_2

$$\boxed{H_f(u_1) = \begin{pmatrix} 2e^{-4} & e^{-4} \\ e^{-4} & 2e^{-4} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad H_f(u_2) = \begin{pmatrix} 2e^2 & e^2 \\ e^2 & -e^2 \end{pmatrix}.}$$

Die Hesse-Matrix in u_1 ist positiv definit, weil

$$\det H_f(u_1) = 3e^{-8} > 0 \quad \text{und} \quad f_{xx}(u_1) = 2e^{-4} > 0.$$

Somit liegt in u_1 ein lokales Minimum vor. In u_2 gilt

$$\det H_f(u_2) = -5e^4 < 0,$$

und somit handelt es sich um einen Sattelpunkt.

b) Die Gleichung der Nebenbedingung lautet

$$g(x,y) = x^3 + y^2 - 1.$$

Mit Hilfe von Lagrange-Multiplikatoren muss für die Extremalstellen $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ von f unter der Nebenbedingung g zusätzlich gelten dass

$$\nabla f(x,y) - \lambda \nabla g(x,y) = (3, 2y) - \lambda(3x^2, 2y) = 0.$$

d.h.

$$\begin{aligned} 0 &= 3 - 3\lambda x^2 = 3(1 - \lambda x^2) \\ 0 &= 2y - 2\lambda y = 2y(1 - \lambda) \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt, dass entweder $y = 0$ oder $\lambda = 1$. Falls $y = 0$, von der Gleichung der Nebenbedingung folgt, dass $x^3 = 1$ und $x = 1$. Dann $\lambda = 1$ löst die erste Gleichung. Falls $\lambda = 1$, aus der ersten Gleichung folgt $x^2 = 1$, d.h. $x = \pm 1$. Aus der Gleichung der Nebenbedingung erhalten wir die Extremalstellen

$$(x_1, y_1) = (1, 0), \quad (x_2, y_2) = (-1, \sqrt{2}) \quad \text{und} \quad (x_3, y_3) = (-1, -\sqrt{2}).$$

Die Auswertung der Funktion f in den Extremalstellen zeigt, dass für $f(x_1, y_1) = 3$ ein Maximum und für $f(x_2, y_2) = f(x_3, y_3) = -1$ ein Minimum vorliegt.

6. (*10 Punkte*)

a) Ein Dreieck mit den Eckpunkten (0,0), (1,0), (1,1), positiv orientiert.

b) Mit der Substitution

(bei I_1) $x = t, dx = dt$ und $y = 0, dy = 0$,
(bei I_2) $x = 1, dx = 0$ und $y = t, dy = dt$,
(bei I_3) $x = 1 - t, dx = -dt$ und $y = 1 - t, dy = -dt$,

folgt

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\gamma_1} xy^2\,dx - yx\,dy = 0. \\ I_2 &= \int_{\gamma_2} xy^2\,dx - yx\,dy = \int_0^1 (-t)dt = -1/2. \\ I_3 &= \int_{\gamma_3} xy^2\,dx - yx\,dy = \int_0^1 (-(1-t)^3 + (1-t)^2)dt = 1/12. \end{aligned}$$

c)

$$I = \int_\gamma xy^2\,dx - yx\,dy = I_1 + I_2 + I_3 = -5/12.$$

d) Es gilt $f(x,y) = xy^2$ und $g(x,y) = -yx$, somit $\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = -y - 2xy$. Mit dem Satz von Green erhalten wir dann:

- Variante 1

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^x (-y - 2xy)\, dy\, dx &= -\int_0^1 \left(\frac{y^2}{2} + xy^2\Big|_0^x\right) dx \\ &= -\int_0^1 (\frac{x^2}{2} + x^3)\, dx \\ &= -\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 \\ &= -\frac{5}{12}.\end{aligned}$$

- Variante 2

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_y^1 (-y - 2xy)\, dx\, dy &= -\int_0^1 \left(xy + x^2y\Big|_y^1\right) dy \\ &= -\int_0^1 (2y - y^2 - y^3)\, dy \\ &= -y^2 + \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4}\Big|_0^1 \\ &= -\frac{5}{12}.\end{aligned}$$