Dr. A. Caspar **ETH Zürich, Januar 2012**

D–BIOL, D–CHAB

Lösungen zu Mathematik I/II

---

1. (*10 Punkte*)

a) Wir benutzen L'Hôpital

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)^2}{x^3-3x+2} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{2\frac{\ln(x)}{x}}{3x^2-3} = \lim_{x\to 1} \frac{2}{3}\frac{\ln(x)}{x^3-x}$$
$$\overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{2}{3}\frac{\frac{1}{x}}{3x^2-1} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

b) Wir berechnen

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4+3x^3-x-1}{3x^5-2x-7} = 0.$$

c) Wir berechnen

$$f(x) = \ln(\cos(x))$$
$$f'(x) = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$
$$f''(x) = -\frac{1}{\cos(x)^2}$$

Das zweite Taylorpolynom im Punkt $x_0 = 0$ ist gegeben durch

$$T_2(x) = 0 + 0 - \frac{1}{2}x^2 = -\frac{x^2}{2}.$$

d) Wir schreiben das Polynom als

$$x^3+4x^2+x-6 = (x-1)(x^2+5x+6) = (x-1)(x+2)(x+3).$$

Also sind die Nullstellen $x_2 = -2$ und $x_3 = -3$.

e) Wir nehmen die Substitution $y = 1-x^2$. Das Integral ist dann

$$\int_1^{\sqrt{\frac{\pi}{2}+1}} x\cos(1-x^2)\,\mathrm{d}x = \int_0^{-\pi/2} \cos(y)\frac{-1}{2}\,\mathrm{d}y$$
$$= -\frac{1}{2}[\sin(y)]_0^{-\pi/2}$$
$$= \frac{1}{2}$$

f) Wir berechnen

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}, \quad f'(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

Die Funktion $f(x)$ ist streng monoton wachsend, wenn $f'(x) > 0$, d.h. $1 - x^2 > 0$, weil $1 + x^2$ immer positiv ist. Es folgt, dass $f(x)$ auf dem Intervall $I =]-1, 1[$ streng monoton wachsend ist.

g) Wir berechnen

$$f = y\tan(x), \quad f_x = y\frac{1}{\cos(x)^2}, \quad f_y = \tan(x),$$
$$f_{xx} = 2y\frac{\sin(x)}{\cos(x)^3}, \quad f_{xy} = \frac{1}{\cos(x)^2}, \quad f_{yy} = 0.$$

Im Punkt $(0,0)$ gilt dann

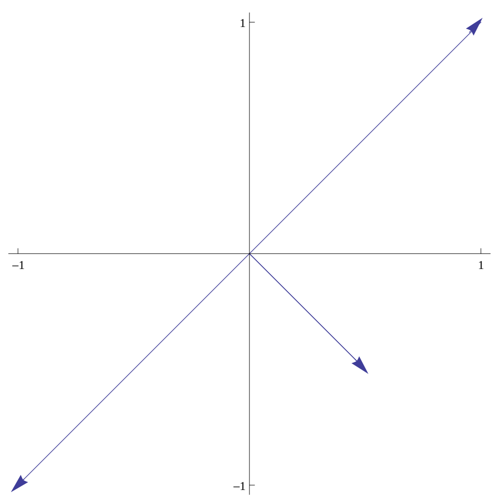
$$f_{xx}(0,0) = 0, \quad f_{xy}(0,0) = 1, \quad f_{yy}(0,0) = 0.$$

2. (*8 Punkte*)

a) In der Eulerschen Darstellung haben wir

$$z = 14e^{\frac{11\pi}{6}i}.$$

b) $-z = -1 - i$ und $\frac{1}{z} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$.



c) $r = -\frac{1}{2}$, $z = 2$.

d)

$$\mathrm{Re}(z_1 z_2) = -2\sqrt{3}, \qquad \mathrm{Im}(z_1 z_2) = -2,$$
$$\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = 0, \qquad \mathrm{Im}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = 1.$$

3. (*12 Punkte*)

a) Entscheiden Sie ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

i) richtig, denn

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

und somit ist der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix gleich dem Rang der Koeffizientenmatrix und das Gleichungssystem ist lösbar. Weiter ist der Rang der Koeffizientenmatrix gleich der Anzahl Unbekannten und daher ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar.

ii) falsch (die drei angegebenen Vektoren sind linear unabhängig)

iii) richtig (folgt aus i)).

iv) falsch (Beispielsweise ist das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ x &= 2 \\ x + y + z + w &= 0, \end{aligned}$$

nicht lösbar. Allgemein ist $Ax = b$ lösbar, falls $\mathrm{Rg}(A|b) = \mathrm{Rg}(A)$. Im obigen Beispiel gilt $\mathrm{Rg}(A) = 2 \neq 3 = \mathrm{Rg}(A|b)$.)

b)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 2 & 7 & 8 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{array}\right).$$

Die Lösung lautet $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

c) $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 0 & \alpha & 4 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -\alpha + 20 - \alpha^2$. Für $\alpha \in \{-5, 4\}$ sind die Vektoren linear abhängig.

d)

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 3 & 1-\lambda & 3 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} &= (2-\lambda)(-1+\lambda^2-3) + (2+\lambda) \\ &= (\lambda+2)(-(\lambda-2)^2+1), \end{aligned}$$

also sind die Eigenwerte bei $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 3$ und $\lambda_3 = 1$.

4. (*12 Punkte*)

a) Wir integrieren die Gleichung $\frac{y'}{y} = 3x^2 - 1$ und erhalten $\int \frac{dy}{y} = \int (3x^2 - 1)dx$. Daraus folgt $\ln|y| = x^3 - x + C$ mit $C \in \mathbb{R}$. Also haben wir $|y(x)| = \tilde{C}e^{x^3-x}$. Aus der Anfangsbedingung $y(0) = 2$ folgt $\tilde{C} = 2$ und somit ist die Lösung des Anfangswertproblems $y(x) = 2e^{x^3-x}$.

b) i) Die zur homogenen Differentialgleichung $y'' + 4y' + 4y = 0$ zugehörige charakteristische Gleichung lautet

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0.$$

Diese charakteristische Gleichung hat doppelte Nullstelle $\lambda_{1,2} = -2$. Somit ist die Lösung der homogenen Differentialgleichung $y_{\text{hom}}(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$ mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

ii) Wir haben $y'(x) = -2C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-2x}(1-2x)$. Die Anfangsbedingungen lauten $y(0) = 2$ und $y'(0) = 4$. Also erhalten wir

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 = 2 \\ y'(0) &= -2C_1 + C_2 = 4. \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $C_2 = 8$. Die Lösung des Anfangswertproblems lautet also $y(x) = 2e^{-2x} + 8xe^{-2x}$.

c) i) Wir benutzen die Substitution $u = x + y - 1$, somit gilt $u' = y' + 1$. Dies eingesetzt in die ursprüngliche Differentialgleichung führt zu

$$\begin{aligned} \ln\left|\frac{u}{2}\right| u' &= u \qquad \Big| \int \\ \int \frac{\ln|\frac{u}{2}|}{u} du &= \int dx = x + C, \qquad C \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{u}{2}\right|\right)^2 &= x + C \\ \ln\left|\frac{u}{2}\right| &= \pm\sqrt{2x + \hat{C}}, \qquad \hat{C} \in \mathbb{R} \\ u &= 2e^{\pm\sqrt{2x+\hat{C}}}. \end{aligned}$$

(Die Lösung $u = -2e^{\pm\sqrt{2x+\hat{C}}}$ fällt weg, da aus $y(0) = 5$ folgt, dass $u(0) = 4 > 0$.) Mit der Rücksubstitution erhalten wir also $y(x) = 2e^{\pm\sqrt{2x+\hat{C}}} - x + 1$. Wir betrachten die Anfangsbedingung $y(0) = 5$ um $\hat{C}$ zu bestimmen. Es gilt

$$\begin{aligned} y(0) = 2e^{\pm\sqrt{\hat{C}}} + 1 &= 5 \\ e^{\pm\sqrt{\hat{C}}} &= 2 \\ \pm\sqrt{\hat{C}} &= \ln 2 > 0, \text{ deshalb müssen wir die positive Wurzel wählen} \\ \hat{C} &= (\ln 2)^2. \end{aligned}$$

Somit ist die Lösung des Anfangswertproblems $y(x) = 2e^{\sqrt{2x+(\ln 2)^2}} - x + 1$.

ii) Die richtige Lösung ist die Graphik oben links, denn wegen der Anfangsbedingung $y(0) = 5$ kommen nur die Graphiken oben links, unten links und unten rechts in Frage. Die Steigung der Funktion in der Graphik unten links ist für alle Punkte x und y konstant, was nicht zu unserem Anfangswertproblem passt. Also kommen nur die Graphik oben links oder unten rechts in Frage. Wir sehen jedoch, dass $y' = \frac{x+y-1}{\ln \frac{|x+y-1|}{2}} - 1 > 0$, falls zum Beispiel $x+y-1 > 2$. Betrachten wir nun die Graphik unten rechts, so sehen wir, dass die Steigung für x in $[5, 6]$ negativ ist. Für diese x haben wir zudem $y > 5$ (siehe Graph) und somit ist die Bedingung $x + y - 1 > 2$ erfüllt, nicht aber $y' > 0$. Also ist die richtige Lösung die Graphik oben links.

5. (*8 Punkte*)

a) Der Gradient von f ist

$$\nabla f(x, y) \quad = \quad (2x - 2y - 20, -2x + y^2 + 20).$$

Die notwendigen Bedingungen für kritische Punkte sind

$$\begin{aligned} 2x - 2y - 20 &= 0 \\ -2x + y^2 + 20 &= 0. \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt $x = 10 + y$ und eingesetzt in die zweite Gleichung erhalten wir

$$-2y + y^2 \quad = \quad 0.$$

Die kritischen Punkte liegen somit bei

$$\boxed{u_1 = (10, 0) \quad \text{und} \quad u_2 = (12, 2).}$$

Mit den zweiten Ableitungen von f

$$f_{xx} = 2, \quad f_{xy} = -2 \quad \text{und} \quad f_{yy} = 2y,$$

erhalten wir für $D(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$ in u_1 und u_2

$$\boxed{D(u_1) = -4 < 0, \quad \text{und} \quad D(u_2) = 4 > 0.}$$

Somit liegt in u_1 ein Sattelpunkt vor. In u_2 gilt $f_{xx}(u_2) = 2$ und somit handelt es sich um lokales Minimum.

b) Die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche $z = f(x, y)$ im Punkt $(0, 1)$ ist gegeben durch

$$z = f(0, 1) + f_x(0, 1)x + f_y(0, 1)(y - 1).$$

Mit

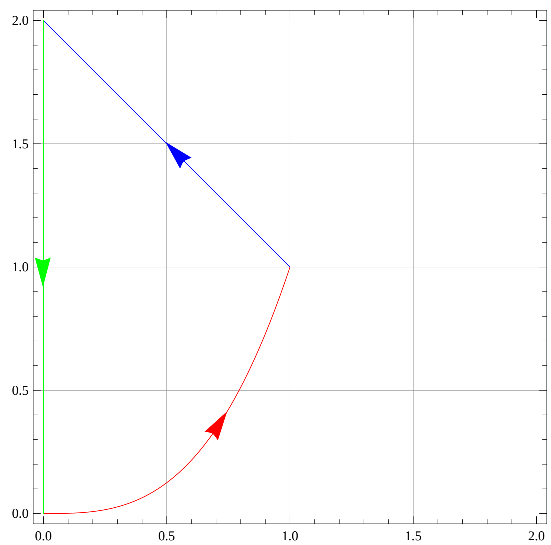
$$f_x(x,y) = \frac{2x}{x^2+3y^2+1}, \quad \text{und} \quad f_y(x,y) = \frac{6y}{x^2+3y^2+1}$$

erhalten wir $f_x(0,1) = 0$ und $f_y(0,1) = \frac{3}{2}$. Weiter folgt mit $f(0,1) = \ln(4)$

$$z = \ln(4) + \frac{3}{2}(y-1) = \ln(4) - \frac{3}{2} + \frac{3}{2}y.$$

6. (*10 Punkte*)

a) Die folgende Abbildung zeigt die Kurven γ_1, γ_2 und γ_3.



b) Mit

(bei I_1) $x = t, dx = dt$ und $y = t^3, dy = 3t^2 dt$,
(bei I_2) $x = 1-t, dx = -dt$ und $y = 1+t, dy = dt$,
(bei I_3) $x = 0, dx = 0$ und $y = 2-t, dy = -dt$,

folgt

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\gamma_1} y^2\,dx + x\,dy = \int_0^1 (t^6 + 3t^3)dt = \frac{25}{28}.\\
I_2 &= \int_{\gamma_2} y^2\,dx + x\,dy = \int_0^1 ((1-t) - (1+t)^2)dt = -\frac{11}{6}.\\
I_3 &= \int_{\gamma_3} y^2\,dx + x\,dy = 0.
\end{aligned}$$

c)

$$I = \int_\gamma y^2\,dx + x\,dy = I_1 + I_2 + I_3 = -79/84.$$

d) Es gilt $f(x,y) = y^2$ und $g(x,y) = x$, somit $\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 1 - 2y$. Mit der Formel von Green erhalten wir dann:

- Variante 1

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_{x^3}^{2-x} (1-2y)\,dy\,dx &= \int_0^1 \left(y - y^2 \Big|_{x^3}^{2-x} \right) dx \\ &= \int_0^1 (2-x) - (2-x)^2 - x^3 + x^6\,dx \\ &= -\frac{(2-x)^2}{2} + \frac{(2-x)^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{7}\Big|_0^1 \\ &= -\frac{79}{84}\end{aligned}$$

Alternativ könnte man das Integral mit folgender Zerlegung berechnen:

- Variante 2

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt[3]{y}} (1-2y)\,dx\,dy + \int_1^2 \int_0^{2-y} (1-2y)\,dx\,dy$$