Dr. A. Caspar **ETH Zürich, Januar 2013**

BIOL-B GES+T PHARM

Lösungen zu Mathematik I/II

---

1. (*10 Punkte*)

a) Es gilt:

$$\frac{2x}{x+\sin(x)} = \frac{f(x)}{g(x)},$$

mit $f(x) = 2x$ und $g(x) = x + \sin(x)$. Alle Voraussetzungen der Regel von De l'Hôpital sind erfüllt, denn

- $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = \lim_{x\to 0} g(x)$,
- $g'(x) = 1 + \cos(x) \neq 0$ in der Nähe von 0,
- $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{1+\cos(x)} = 1$.

Somit gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1.$$

b) Für

$$f(x) = \frac{x^2 - 1 + \arctan x}{x-1} = x + 1 + \frac{\arctan x}{x-1}$$

ist

$$\lim_{x\to +\infty} (f(x) - (x+1)) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\arctan x}{x-1} = 0.$$

Das heisst, dass die Asymptote durch $g(x) = x + 1$ gegeben ist.

c) Wir schreiben

$$x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = x^2(x-2) - 4(x-2) = (x^2-4)(x-2) = (x+2)(x-2)^2.$$

Somit sehen wir, dass $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$ zwei Nullstellen sind.

d) Wir suchen a so dass

$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0 \overset{!}{=} \lim_{x\to 0} \ln(a+x)$$

erfüllt ist. Es gilt $\lim_{x\to 0} \ln(a+x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \ln(a) = 0$. Also folgt $a = 1$.

e) Wir berechnen

$$\int_{-A}^{A} e^{-|x|}dx = \int_{-A}^{0} e^{x}dx - \int_{0}^{A} e^{-x}dx = 2\left(1-e^{-A}\right).$$

Falls $A = \ln 2$ ist, gibt es

$$2\left(1-e^{-A}\right) = 2\left(1-e^{-\ln(2)}\right) = 2\left(1-\frac{1}{2}\right) = 1.$$

f) i) Falsch, da $f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = (\tan x)^{-1}$

ii) Richtig, da $f(\pi/2) = \ln 1 = 0$.

iii) Die Funktion $\ln x$ ist monoton wachsend für alle $x > 0$. Wenn $x \in [\pi/4, 1]$ ist, ist $\sin x$ positiv und auch monoton wachsend. Deshalb ist die Komposition $\ln(\sin x)$ auch monoton wachsend auf $[\pi/4, 1]$. Somit ist *iii*) richtig.

iv) Falsch, da

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}}^{1} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx &= -\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\Big|_{x=\frac{1}{2}}^{1} \\ &= -\frac{2}{\pi}\left(0-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \neq 1.\end{aligned}$$

g) i) Diese Aussage ist richtig, weil die dargestellte Fläche gerade die Fläche des ersten Viertelkreises ist. Dieser ist durch die Funktion $x^2 + y^2 = 4, x \in [0, 2]$ gegeben. Wir lösen diese Kreisgleichung nach y auf und erhalten

$$y = \pm\sqrt{4-x^2},\ x \in [0, 2].$$

Damit $y \in [0, 2]$ gilt, erhalten wir die einzige Lösung $y = \sqrt{4-x^2}$. Also ist diese graue Fläche A durch $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$ gegeben.

ii) Diese Aussage ist falsch. Begründung siehe Teilaufgabe *i*).

iii) Die Aussage *iii*) ist richtig, denn die Fläche eines Viertels des Kreises mit Radius R ist $\frac{1}{4}R^2\pi$ und der Wert des Integrals $2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{d}\varphi$ ist $\pi = \frac{4}{4}\pi$.

iv) Diese Aussage ist falsch. Begründung siehe Teilaufgabe *iii*).

2. (*8 Punkte*)

a) i) und iii) sind richtig.

b) i) richtig

$$z_1 = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i = 3e^{i\frac{2\pi}{3}} \text{ und } z_2 = i = e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow z = 3e^{i\frac{\pi}{6}} \in B$$

$$\text{da } 2 \leq 3 \leq 4 \text{ und } \frac{\pi}{12} \leq \frac{\pi}{6} \leq \frac{5\pi}{12}.$$

ii) falsch

$$z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = e^{i\frac{5\pi}{6}} \text{ und } z_2 = \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{i}{6} = \frac{1}{3}e^{i\frac{\pi}{6}} \Rightarrow z = 3e^{i\frac{2\pi}{3}} \notin B$$
$$\text{da } \frac{2\pi}{3} > \frac{5\pi}{12}.$$

iii) falsch

$$z_1 = \frac{5}{4}e^{\frac{\pi}{3}i} \text{ und } z_2 = \frac{1}{2}e^{\frac{5\pi}{12}i} \Rightarrow z = \frac{5}{2}e^{-i\frac{\pi}{12}} \notin B$$
$$\text{da } \frac{-\pi}{12} \leq \frac{\pi}{12}.$$

iv) richtig

$$z_1 = 5e^{\frac{5\pi}{3}i} \text{ und } z_2 = 2e^{\frac{3\pi}{2}i} \Rightarrow z = \frac{5}{2}e^{i\frac{\pi}{6}} \in B$$
$$\text{da } 2 \leq \frac{5}{2} \leq 4 \text{ und } \frac{\pi}{12} \leq \frac{\pi}{6} \leq \frac{5\pi}{12}.$$

c)

$$|z \cdot \bar{z}| = 4 \;\Rightarrow\; |z| \cdot |\bar{z}| = 4 \;\Rightarrow\; |z| = 2 \;\Rightarrow\; z = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$\Rightarrow z = -1 + \sqrt{3}i \Rightarrow Re(z) = -1 \text{ und } Im(z) = \sqrt{3}.$$

d) $z^3 = \frac{8}{i} = -8i = 8e^{\frac{3\pi}{2}i}$.

$$\begin{aligned} z_1 &= 2e^{\frac{\pi}{2}i} \\ z_2 &= 2e^{\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)i} = 2e^{\frac{7\pi}{6}i} \\ z_3 &= 2e^{\left(\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{3}\right)i} = 2e^{\frac{11\pi}{6}i}. \end{aligned}$$

3. (*12 Punkte*)

a) MC-Aufgabe

Ein lineares Gleichungssystem $Ax = c$ ist genau dann lösbar, wenn Rang(A) =Rang$(A|c)$. Wir haben

$$A|c = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 7 \\ 3 & 3 & 3 & 15 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & 6 & 9 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 12 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Somit ist $\text{Rang}(A) = 3 = \text{Rang}(A|c)$. Also ist das lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar. Es folgt

i) falsch
ii) richtig
iii) richtig
iv) falsch

b) MC-Aufgabe

Es gilt

i) falsch (die Eigenwerte der Inversen sind die Kehrwerte der Eigenwerte von A).
ii) richtig ($Av = \lambda v \Rightarrow A^2 v = \lambda A v = \lambda^2 v$, das heisst, falls v Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist, so ist v Eigenvektor von A^2 zum Eigenwert λ^2).
iii) richtig (siehe ii)).
iv) falsch (falls beispielsweise $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ so hat A die zwei verschiedenen Eigenwerte 1 und -1, aber $A^2 = I_2$ hat nur den Eigenwert 1).

c)

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & -6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Die Lösung lautet $x = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

d) Es ist

$$Av = \begin{pmatrix} -1 + 4a \\ 3 \\ 3a \end{pmatrix}.$$

Damit v Eigenvektor von A ist, muss $Av = \lambda v$ sein für ein $\lambda \in \mathbb{C}$, also

$$\begin{pmatrix} -1 + 4a \\ 3 \\ 3a \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}.$$

Aus der zweiten Gleichung erhalten wir $\lambda = 3$ und somit folgt mit $-1 + 4a = 3$, dass $a = 1$. Also ist $v = (1, 1, 1)^T$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert 3.

e) Die gegebenen Vektoren sind linear abhängig, genau dann, wenn

$$\begin{aligned} 0 &= \det \begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -x + 2 + 2 - 2x = -3x + 4, \end{aligned}$$

also sind die Vektoren linear abhängig, falls $x = \frac{4}{3}$.

4. (*12 Punkte*)

a) Die Funktion $y(t)$ ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y''(t) - 8y'(t) + 15y(t) = 0$. Dies kann man zum Beispiel mit den Nullstellen der charakteristischen Gleichung herleiten. Alternativ kann man $y(t)$ jeweils in die Differentialgleichungen einsetzen. Wir finden:

i) Falsch.
ii) Richtig.
iii) Richtig.
iv) Falsch.

b) Wir beobachten zuerst, dass unsere Differentialgleichung auf folgende Art umgeschrieben werden kann :

$$y'(x) = \big(y(x) + x\big)^2 - 1.$$

Wir benutzen die Substitution $u(x) := y(x)+x$. Dementsprechend gilt dass $u'(x) = y'(x) + 1$. Dies eingesetzt in die ursprüngliche Differentialgleichung führt zu

$$u'(x) = y'(x) + 1 = (y(x) + x)^2 - 1 + 1 = u(x)^2.$$

Durch Separation der Variablen erhalten wir

$$\int \frac{du}{u^2} = \int 1dx.$$

Daraus folgt

$$-\frac{1}{u(x)} = x + C$$

oder äquivalent

$$u(x) = \frac{1}{-x - C}.$$

Da $u(x) := y(x) + x$, schliessen wir, dass die allgemeine Lösung der obigen Differentialgleichung von der Form

$$y(x) = \frac{1}{-x - C} - x$$

ist. Da unsere Anfangsbedingung $y(0) = 1$ lautet, folgt $C = -1$ und deshalb ist unsere Lösung des AWPs

$$y(x) = \frac{1}{-x + 1} - x.$$

c) i) Die dazugehörige homogene Differentialgleichung ist von der Form

$$\frac{1}{2}y'(x) + y(x)\cos(x) = 0.$$

Via Separation der Variablen sehen wir direkt, dass die allgemeine Lösung der homogenen DG von der Form

$$y_{hom}(x) = Ke^{-2\sin x}, \quad K \in \mathbb{R},$$

ist.

ii) Um die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu bekommen, verwenden wir Variation der Konstanten. Für die allgemeine Lösung y_{allg} verwenden wir den Ansatz

$$y_{allg}(x) = K(x)e^{-2\sin(x)}.$$

Durch Ableiten erhalten wir

$$y'_{allg}(x) = K'(x)e^{-2\sin(x)} - K(x)2\cos(x)e^{-2\sin(x)}.$$

Durch das Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung folgt

$$\frac{1}{2}K'(x)e^{-2\sin(x)} - \frac{1}{2}K(x)2\cos(x)e^{-2\sin(x)} + \cos(x)K(x)e^{-2\sin(x)} = e^{-2\sin(x)-\frac{1}{2}x}.$$

Daraus folgern wir

$$\frac{1}{2}K'(x) = e^{-\frac{1}{2}x}$$

und deshalb gilt

$$K(x) = -4e^{-\frac{1}{2}x} + \tilde{K}, \quad \tilde{K} \in \mathbb{R}.$$

Durch die Wahl unseres Ansatz schliessen wir

$$y_{allg}(x) = (-4e^{-\frac{1}{2}x} + \tilde{K})e^{-2\sin(x)} = -4e^{-\frac{1}{2}x-2\sin(x)} + \tilde{K}e^{-2\sin(x)}.$$

5. (*8 Punkte*)

a) i) Ein kritischer Punkt (x^*, y^*) ist gegeben durch:

$$h_x(x^*, y^*) = 0, \quad h_y(x^*, y^*) = 0.$$

Für diese Funktion erhalten wir

$$4(x^*)^3 - 4x^* + 4y^* = 0 \qquad 4(y^*)^3 - 4y^* + 4x^* = 0.$$

Wir addieren die Gleichungen und erhalten

$$4(x^*)^3 = -4(y^*)^3 \quad \text{d.h.} \quad x^* = -y^*.$$

Die kritischen Punkte sind somit

$$(x_1, y_1) = (0,0), \quad (x_2, y_2) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \quad (x_3, y_3) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

ii) Mit den zweiten Ableitungen

$$h_{xx}(x,y) = 12x^2 - 4, \quad h_{xy}(x,y) = 4, \quad h_{yy}(x,y) = 12y^2 - 4,$$

folgt, dass der Punkt $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ ein lokales Minimum ist, weil

$$h_{xx}(\sqrt{2}, -\sqrt{2})h_{yy}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) - h_{xy}(\sqrt{2}, -\sqrt{2})^2 = 384 > 0$$

und $h_{xx}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 20 > 0$.

b) Die partielle Ableitung f_x ist gegeben durch

$$f_x(x,y) = F'\Big(xy + \frac{y}{x}\Big)\Big(y - \frac{y}{x^2}\Big).$$

c) Die Ableitung von F ist

$$F'(t) = -\frac{\sin(\ln(t/2))}{t}.$$

Die Tangentialebene ist parallel zur xy-Ebene, wenn die partiellen Ableitungen im entsprechenden Punkt verschwinden. Mit

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= -\sin\left(\ln\left(\frac{xy+\frac{y}{x}}{2}\right)\right)\frac{1}{xy+\frac{y}{x}}\left(y - \frac{y}{x^2}\right) \\ f_y(x,y) &= -\sin\left(\ln\left(\frac{xy+\frac{y}{x}}{2}\right)\right)\frac{1}{xy+\frac{y}{x}}\left(x + \frac{1}{x}\right), \end{aligned}$$

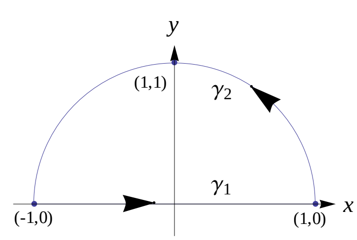
finden wir, dass *i)* und *iii)* richtig sind.

6. (*10 Punkte*)

a)

$$\begin{aligned} \sigma_1 : t \mapsto \sigma_1(t) &= \begin{pmatrix} t \\ 1-t \end{pmatrix}, & 0 \le t \le 1 \\ \sigma_2 : t \mapsto \sigma_2(t) &= \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, & 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

b) i)



ii)

$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1, 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}\right\}$$

iii) Für die Rechnung benötigen wir

$$P_y(x,y) = \sin(xy) + xy\cos(xy)$$

und

$$Q_x(x,y) = \sin(xy) + xy\cos(xy).$$

Nach der Green'schen Formel ist nun der Wert des gesuchten Kurvenintegrals gleich dem Integral von $Q_x - P_y$ über die Fläche B. Diese Differenz ist aber Null. Also ist

$$\oint_\gamma K \cdot d\gamma = 0.$$

iv)

$$\gamma_1 = t \mapsto \gamma_1(t) = \begin{pmatrix} 2t-1 \\ 0 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

Für die Rechnung benötigen wir

$$\dot{x}(t) = 2 \qquad \text{und} \qquad \dot{y}(t) = 0.$$

Nach Definition des Kurvenintegrals ist also

$$\int_{\gamma_1} K \cdot d\gamma = \int_0^1 K\big(\gamma_1(t)\big)\dot{\gamma}_1(t)dt = \int_0^1 4tdt.$$

Rechnen wir dieses Integral aus, erhalten wir

$$\int_{\gamma_1} K \cdot d\gamma = 2.$$

v) Es gilt

$$\int_{\gamma_1} K \cdot d\gamma + \int_{\gamma_2} K \cdot d\gamma = \int_\gamma K \cdot d\gamma,$$

und mit obigen Resultaten also

$$2 + \int_{\gamma_2} K \cdot d\gamma = 0.$$

Somit ist

$$\int_{\gamma_2} K \cdot d\gamma = -2.$$

Mit den Angaben aus dem Hinweis folgt analog

$$\int_{\gamma_2} K \cdot d\gamma = 0 - 1 = -1.$$