Dr. A. Caspar **ETH Zürich, Januar 2013**

BIOL-B HST PHARM

Prüfung zur Vorlesung Mathematik I/II

Bitte ausfüllen!

Name:	
Vorname:	
Legi-Nr.:	

Nicht ausfüllen!

Aufgabe	Punkte		Kontrolle	
	MC	Total	MC	Total
1				
2				
3				
4				
5				
6	-		-	
Total				

Vollständigkeit	

Bitte wenden!

Wichtige Hinweise zur Prüfung

Prüfungsdauer: 3 Stunden.

Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten (nicht Blätter!) mit persönlichen, von Hand geschriebenen Notizen. Keine (Taschen)Rechner. 1 Wörterbuch für fremdsprachige Studierende.

Bitte beachten Sie folgende Punkte:

- Tragen Sie **jetzt** Ihren Namen in das Deckblatt ein und geben Sie es **am Ende** der Prüfung als vorderstes Blatt Ihrer Arbeit ab.
- Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch.
- Beginnen Sie jede Aufgabe **auf einem neuen Blatt**.
- Begründen Sie Ihre Lösungen, soweit nicht anders angegeben. Dabei können Sie bekannte Formeln aus der Vorlesung und den Übungen ohne Herleitung verwenden.
- Schreiben Sie **nicht** mit Bleistift, rotem oder grünem Kugelschreiber.
- Die Reihenfolge der Bearbeitung der Aufgaben ist Ihnen freigestellt. Ordnen Sie jedoch am Ende der Prüfung die Aufgaben für die Abgabe.
- Wir erwarten nicht, dass Sie alle Aufgaben lösen. Versuchen Sie einfach Ihr Bestes! Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet.
- Bei einer **Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe)** sind jeweils 4 Aussagen/Antworten angegeben, davon sind jeweils genau 2 korrekt.

  Eine MC-Aufgabe ist genau dann korrekt gelöst, wenn Sie die 2 korrekten Antworten mit "richtig" **und** die 2 inkorrekten mit "falsch" kennzeichnen. Sie müssen also bei jeder MC-Aufgabe genau 4 Kreuze setzen und jedes muss jeweils an der richtigen Stelle sein.

  Zum Beispiel ist folgende MC-Aufgabe nur mit diesen 4 Kreuzen korrekt gelöst.

richtig	**falsch**	
$\otimes$	$\bigcirc$	Hier steht eine korrekte Aussage/Antwort.
$\otimes$	$\bigcirc$	Hier steht eine korrekte Aussage/Antwort.
$\bigcirc$	$\otimes$	Hier steht eine inkorrekte Aussage/Antwort.
$\bigcirc$	$\otimes$	Hier steht eine inkorrekte Aussage/Antwort.

  Bei den MC-Aufgaben werden nur die Antworten auf den **Aufgabenblättern** bewertet. Die Antworten in den MC-Aufgaben müssen nicht begründet werden.

Viel Erfolg!

Siehe nächstes Blatt!

Aufgaben

---

1. (*10 Punkte*)

Die Antworten in dieser Aufgabe müssen Sie **nicht** begründen. Schreiben Sie die Antworten **vollständig gekürzt und vereinfacht** direkt auf das Aufgabenblatt. Antworten auf anderen Blättern werden nicht bewertet.

a) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x}{x+\sin(x)} = \underline{\hspace{3cm}}.$$

b) Gegeben sei die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{x^2 - 1 + \arctan x}{x-1}.$$

Bestimmen Sie die Asymptote g von f für $x \to +\infty$

$$g(x) = \underline{\hspace{4cm}}.$$

c) Bestimmen Sie zwei Nullstellen x_1, x_2 der Funktion g mit

$$g(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8.$$

$$x_1 = \underline{\hspace{2cm}} \qquad x_2 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

d) Seien $a > 0$ eine reelle Zahl und f eine Funktion mit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{falls } x < 0, \\ \ln(a+x) & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$$

Für welches a ist f stetig in $x_0 = 0$?

$$a = \underline{\hspace{3cm}}.$$

e) Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int_{-A}^{A} e^{-|x|}\, dx = \underline{\hspace{2.5cm}},$$

mit $A = \ln 2$.

Bitte wenden!

f) MC-Aufgabe

Gegeben sei die Funktion $f :]0, \pi[\to \mathbb{R}$,

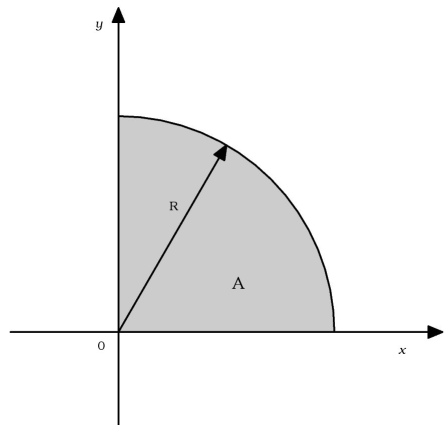
$$f(x) = \ln(\sin(x)) .$$

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind, und kreuzen Sie die entsprechende Antwort direkt **auf dem Aufgabenblatt** an.

richtig	falsch	
◯	◯	Es gilt $f'(x) = \tan x$.
◯	◯	Es gilt $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.
◯	◯	f ist monoton wachsend auf $\left[\frac{\pi}{4}, 1\right]$.
◯	◯	Es gilt $\int_{\frac{1}{2}}^{1} e^{f\left(\frac{\pi}{2}x\right)} dx = 1$.

g) MC-Aufgabe

Sei A wie in untenstehender Skizze das erste Viertel des Kreises um Null mit Radius $R = 2$: $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^2 \leq 4,\ 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2\}$.



Welche der folgenden Integrale haben denselben Wert wie der Flächeninhalt von A? Kreuzen Sie die entsprechenden Antworten direkt **auf dem Aufgabenblatt** an.

richtig	falsch	
◯	◯	$\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, \mathrm{d}x$.
◯	◯	$\frac{1}{2} \int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, \mathrm{d}x$.
◯	◯	$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi$.
◯	◯	$8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\varphi$.

Siehe nächstes Blatt!

2. (*8 Punkte*)
Die Antworten in dieser Aufgabe müssen Sie **nicht** begründen. Schreiben Sie die Antworten **vollständig gekürzt und vereinfacht** direkt auf das Aufgabenblatt. Antworten auf anderen Blättern werden nicht bewertet.

Hier bezeichnet i die imaginäre Einheit. Es gilt also $i^2 = -1$.

a) MC-Aufgabe

Welche der folgenden Gleichungen sind richtig?

Kreuzen Sie die entsprechenden Antworten direkt **auf dem Aufgabenblatt** an.

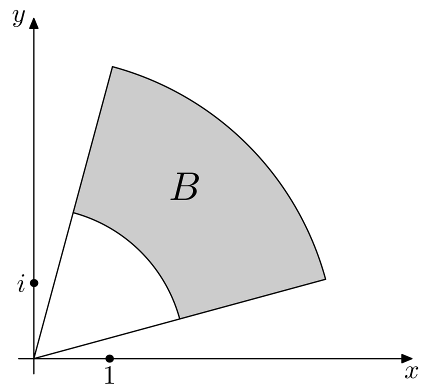
richtig	**falsch**	
○	○	$\frac{i^{24}+i^{27}+i^{36}+3i^{41}}{i+1} = 2.$
○	○	$(1+i)^4-(1-i)^4=16.$
○	○	$(1+i)^5(1-i)^5=32.$
○	○	$i^{16}+i^{22}-i^{33}+i^{17}=i.$

Bitte wenden!

b) MC-Aufgabe

Die Skizze unten zeigt ein Gebiet B in der komplexen Ebene mit

$$B = \left\{ z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \;\middle|\; 2 \le r \le 4, \frac{\pi}{12} \le \varphi \le \frac{5\pi}{12} \right\}.$$



Entscheiden Sie, für welche Zahlen z_1 und z_2 der Quotient $z = \frac{z_1}{z_2}$ in B liegt:

$$z = \frac{z_1}{z_2} \in B\ ?$$

Kreuzen Sie die entsprechenden Antworten direkt **auf dem Aufgabenblatt** an.

richtig	**falsch**	
○	○	$z_1 = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} i$ und $z_2 = i$.
○	○	$z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ und $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{i}{6}$.
○	○	$z_1 = \frac{5}{4} e^{\frac{\pi}{3} i}$ und $z_2 = \frac{1}{2} e^{\frac{5\pi}{12} i}$.
○	○	$z_1 = 5e^{\frac{5\pi}{3} i}$ und $z_2 = 2e^{\frac{3\pi}{2} i}$.

c) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von z mit $arg(z) = \frac{2\pi}{3}$ and $z \cdot \bar{z} = 4$.

$\mathrm{Re}(z) =$ ______________, $\mathrm{Im}(z) =$ ______________.

d) Die Gleichung $z^3 = \frac{8}{i}$ hat drei verschiedene Lösungen z_1, z_2 und z_3. Bestimmen Sie die Lösungen z_2 und z_3 jeweils in der Form $r \cdot e^{i\varphi}$ mit $r > 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi[$.

$$z_1 = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{2}},$$

$z_2 =$ ________________,

$z_3 =$ ________________.

3. (*12 Punkte*)

a) MC-Aufgabe

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind, und kreuzen Sie die entsprechende Antwort direkt **auf dem Aufgabenblatt** an.

richtig	**falsch**	
○	○	Es gilt $\operatorname{Rang}(A) = 2$.
○	○	Es gilt $\operatorname{Rang}(A) = 3$.
○	○	Das lineare Gleichungssystem $Ax = c$ hat eine eindeutige Lösung.
○	○	Das lineare Gleichungssystem $Ax = c$ hat unendlich viele Lösungen.

b) MC-Aufgabe

Es sei A eine invertierbare $n \times n$ Matrix. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind, und kreuzen Sie die entsprechende Antwort direkt **auf dem Aufgabenblatt** an.

richtig	**falsch**	
○	○	Jeder Eigenwert von A ist auch Eigenwert von A^{-1}.
○	○	Jeder Eigenvektor von A ist auch Eigenvektor von A^2.
○	○	Falls alle Eigenwerte von A reell sind, so sind alle Eigenwerte von A^2 positiv.
○	○	Falls A n paarweise voneinander verschiedene Eigenwerte hat, so sind auch alle Eigenwerte von A^2 paarweise voneinander verschieden.

c) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

mit dem Gauss-Verfahren.

Bitte wenden!

d) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Angenommen, dass es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist. Bestimmen Sie dieses a und den Eigenwert λ.

e) Bestimmen Sie $x \in \mathbb{R}$ so, dass die Vektoren

$$\begin{pmatrix} x \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

linear abhängig sind.

4. *(12 Punkte)*

a) MC-Aufgabe

Betrachten Sie die Funktion

$$y(t) = C_1 e^{5t} + C_2 e^{3t} \tag{1}$$

wobei C_1 und C_2 reelle Zahlen sind.
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind, und kreuzen Sie die entsprechende Antwort direkt **auf dem Aufgabenblatt** an.

richtig	**falsch**	
◯	◯	$y(t)$ in (1) ist eine Lösung von $y''(t) = 16y'(t) - 15y(t)$.
◯	◯	$y(t)$ in (1) ist eine Lösung von $y''(t) = 8y'(t) - 15y(t)$.
◯	◯	$y(t)$ in (1) ist eine Lösung von $16y'(t) = 2y''(t) + 30y(t)$.
◯	◯	$y(t)$ in (1) ist eine Lösung von $y''(t) = 32y'(t) - 60y(t)$.

b) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = y^2(x) + 2y(x)x + x^2 - 1 \qquad \text{mit} \qquad y(0) = 1.$$

Hinweis: Benutzen Sie eine geeignete Substitution.

c) Wir betrachten die folgende Differentialgleichung

$$\frac{1}{2}y'(x) + \cos(x)y(x) - e^{-2\sin(x) - \frac{1}{2}x} = 0. \tag{2}$$

i) Schreiben Sie die zugehörige homogene Differentialgleichung auf und finden Sie deren allgemeine Lösung.

ii) Geben Sie nun die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (2) an.

5. (*8 Punkte*)

a) i) Bestimmen Sie die kritischen Punkte der Funktion

$$h(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy.$$

ii) Entscheiden Sie **nur** für den kritischen Punkt mit strikt positiver x-Koordinate, ob es sich um ein lokales Minimum, lokales Maximum oder einen Sattelpunkt handelt.

b) Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Gegeben sei die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^{>0} \times \mathbb{R}^{>0} &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto f(x,y) = F\Big(xy + \frac{y}{x}\Big). \end{aligned}$$

Für die partielle Ableitung f_y gilt

$$f_y(x,y) = F'\Big(xy + \frac{y}{x}\Big)\Big(x + \frac{1}{x}\Big).$$

Bestimmen Sie die partielle Ableitung f_x.

c) MC-Aufgabe

Sei $F : \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F(x) = \cos\Big(\ln\Big(\frac{x}{2}\Big)\Big).$$

Sei $f : \mathbb{R}^{>0} \times \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}$ eine Funktion gegeben durch

$$f(x,y) = F\Big(xy + \frac{y}{x}\Big).$$

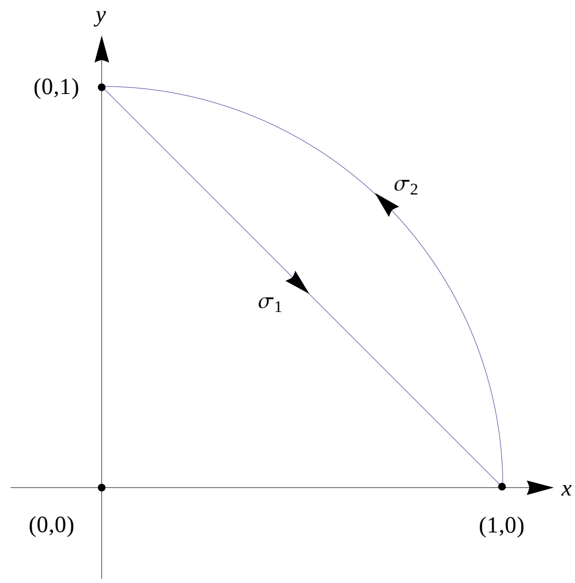
Wir suchen Punkte (x,y,z), in denen die Tangentialebene an G_f parallel zur xy-Ebene ist. Für welche Paare (x,y) ist dies der Fall?

Kreuzen Sie die entsprechende Antwort direkt **auf dem Aufgabenblatt** an.

richtig	**falsch**	
○	○	$(x,y) = (1,1)$.
○	○	$(x,y) = \left(1, e^{\frac{\pi}{2}}\right)$.
○	○	$(x,y) = (1, e^{\pi})$.
○	○	$(x,y) = (1, e)$.

6. (*10 Punkte*)

a) In folgender Skizze sehen Sie zwei ebene Kurven σ_1 und σ_2: σ_1 liegt auf einer Geraden und σ_2 ist ein Ausschnitt des Einheitskreisbogens. Die Pfeile kennzeichnen die Durchlaufrichtung.



Geben Sie für σ_1 und σ_2 jeweils eine Funktion an, welche die Kurve parametrisiert. Berücksichtigen Sie dabei die Durchlaufrichtung. Schreiben Sie Ihre Antwort direkt **auf das Aufgabenblatt**.

$$\sigma_1 : t \mapsto \sigma_1(t) = \begin{pmatrix} \qquad\qquad \\ \end{pmatrix}, \qquad \_\_\_\_\_\_ \leq t \leq \_\_\_\_\_\_ .$$

$$\sigma_2 : t \mapsto \sigma_2(t) = \begin{pmatrix} \qquad\qquad \\ \end{pmatrix}, \qquad \_\_\_\_\_\_ \leq t \leq \_\_\_\_\_\_ .$$

Bitte wenden!

b) Gegeben seien nun zwei ebene Kurven γ_1 und γ_2, parametrisiert durch

$$\gamma_1 : t \mapsto \gamma_1(t) = \begin{pmatrix} 2t-1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 1, \quad \text{und}$$
$$\gamma_2 : t \mapsto \gamma_2(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le \pi.$$

Mit γ bezeichnen wir die geschlossene Kurve, die sich ergibt, wenn man zunächst γ_1 und dann γ_2 durchläuft.

i) Zeichnen Sie die Kurven γ_1 und γ_2 in ein Koordinatensystem. Geben Sie dabei auch jeweils die Durchlaufrichtung an.

ii) Die von γ umschlossene Fläche nennen wir B. Ergänzen Sie folgende Beschreibung von B direkt **auf dem Aufgabenblatt**:

$$B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underline{\qquad\qquad} \le x \le \underline{\qquad\qquad}, \underline{\qquad\qquad} \le y \le \underline{\qquad\qquad} \right\}$$

iii) Sei $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld

$$K : (x,y) \mapsto K(x,y) = \Big(P(x,y), Q(x,y) \Big) = \Big(1 + x + y\sin(xy), y + x\sin(xy) \Big).$$

Berechnen Sie mit der Formel von Green das Kurvenintegral für K entlang γ:

$$\oint_\gamma K \cdot d\gamma = \oint_\gamma \Big(1 + x + y\sin(xy) \Big) dx + \Big(y + x\sin(xy) \Big) dy$$

iv) Berechnen Sie das Kurvenintegral für das Vektorfeld K entlang γ_1:

$$\int_{\gamma_1} K \cdot d\gamma = \int_{\gamma_1} \Big(1 + x + y\sin(xy) \Big) dx + \Big(y + x\sin(xy) \Big) dy$$

v) Verwenden Sie Ihre Ergebnisse aus iii) und iv), um das Kurvenintegral für das Vektorfeld K entlang γ_2 zu berechnen:

$$\int_{\gamma_2} K \cdot d\gamma = \int_{\gamma_2} \Big(1 + x + y\sin(xy) \Big) dx + \Big(y + x\sin(xy) \Big) dy.$$

Hinweis: Falls Sie iii) und/oder iv) nicht lösen konnten, rechnen Sie mit $\oint_\gamma K \cdot d\gamma = 0$ und/oder $\int_{\gamma_1} K \cdot d\gamma = 1$.