Prof. Dr. E. W. Farkas **ETH Zürich, Februar 2014**

BIOL-B GES+T PHARM

Lösungen zu Mathematik I/II

---

1. (*10 Punkte*)

a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}.$$

b)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = -1.$$

c) Durch die Substitution $u = \ln(x)$ erhalten wir dass

$$\int_1^2 \sin\big(\ln(x)\big)\,dx = \int_0^{\ln(2)} \sin(u)\,e^u\,du$$

Durch zweifaches partielles Integrieren erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln(2)} \sin(u)\,e^u\,du &= \sin(u)\,e^u\Big|_0^{\ln(2)} - \int_0^{\ln(2)} \cos(u)\,e^u\,du \\ &= \sin(u)\,e^u\Big|_0^{\ln(2)} - \cos(u)\,e^u\Big|_0^{\ln(2)} - \int_0^{\ln(2)} \sin(u)\,e^u\,du\end{aligned}$$

Deshalb schliessen wir

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln(2)} \sin(u)\,e^u\,du &= \frac{1}{2}\left[\sin(u)\,e^u\Big|_0^{\ln(2)} - \cos(u)\,e^u\Big|_0^{\ln(2)}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(\sin(\ln(2)) - \cos(\ln(2)) + 1\right).\end{aligned}$$

d) Es ist $a_0 = f(0) = 0$ und $a_1 = f'(0) = 1$.

e) Beobachte, dass

$$x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = (x-2)(x+3)(x-4).$$

Daraus folgt $x_1 = 2$, $x_2 = -3$ und $x_3 = 4$.

f) Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2$$

hat als Ableitung

$$f'(x) = x^2 + 3x.$$

Durch Nullsetzen finden wir die Kandidaten für Extrema in $\{0, -3\}$. Die zugehörigen Funktionswerte sind

$$f(0) = 0, \quad f(-3) = \frac{9}{2}.$$

Mit $f''(0) = 3 > 0$ und $f''(-3) = -3 < 0$ folgern wir

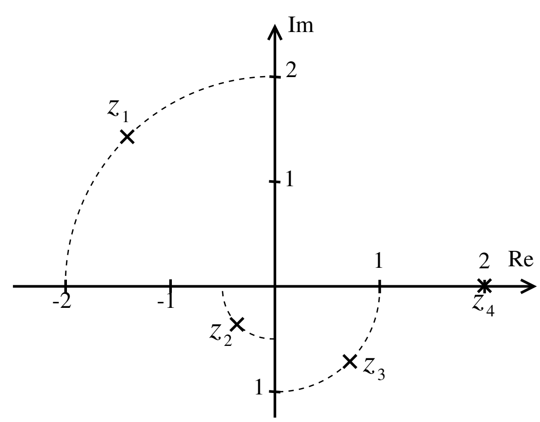
$$(x_{min}, y_{min}) = (0, f(0)) = (0, 0), \qquad (x_{max}, y_{max}) = (-3, f(-3)) = \left(-3, \frac{9}{2}\right).$$

g) Da $\sin(x)$ eine stetige Funktion ist, ist die Funktion f stetig auf $[0, \infty)$ genau dann wenn $a = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. (*10 Punkte*)

a)

$$\begin{aligned}
z_1 &= 2 - 2\sqrt{3}i && \Rightarrow\ |z_1| = 4, && \arg(z_1) = \tfrac{5\pi}{3} \\
z_2 &= 4\sqrt{2}\left(\frac{i-3}{1-2i}\right) && \Rightarrow\ |z_2| = 8, && \arg(z_2) = \tfrac{5\pi}{4} \\
z_3 &= \frac{z_2}{z_1^3} && \Rightarrow\ |z_3| = \tfrac{8}{4^3} = \tfrac{1}{8}, && \arg(z_3) = \tfrac{5\pi}{4} - 3\tfrac{5\pi}{3} \equiv \tfrac{\pi}{4} \pmod{2\pi}.
\end{aligned}$$



b)

c) Gemäss Hinweis ist die zu z_1 konjugierte Zahl eine weitere Nullstelle, d.h.,

$$z_2 = z_1^* = 1 - i\sqrt{3}.$$

Wir berechnen

$$(z - 1 - i\sqrt{3})(z - 1 + i\sqrt{3}) = z^2 - 2z + 4.$$

Durch Polynomdivision erhalten wir

$$\frac{z^4 + 2z^3 + z^2 + 6z + 20}{z^2 - 2z + 4} = z^2 + 4z + 5.$$

Dieses quadratisches Polynom ergibt zwei restlichen Lösungen $z_{3,4} = -2 \pm i$.

3. (*10 Punkte*)

a) MC-Aufgabe (*2 Punkte*)

- falsch. Wähle $A \neq 0$ und $B = -A$.
- richtig. A^2 ist ein Vielfaches der Identität.
- falsch. Gilt $Av = \lambda v$ und $Bv = \mu v$, so ist $(A-B)^3 v = (\lambda - \mu)^3 v$.
- richtig: beide Matrizen haben das charakteristische Polynom $\chi(\lambda) = \lambda^2 - \lambda(a + b) - 1$.

b) (*3 Punkte*) Gauss-Algorithmus ergibt

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 8 & 4 \\ -5 & 3 & -8 & -8 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 20 & 10 \\ 0 & -2 & -28 & -18 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 20 & 10 \\ 0 & 0 & -8 & -8 \end{array}\right).$$

Das Gleichungssystem besitzt also die eindeutige Lösung $(-3, -5, 1)$.

c) (*2 Punkte*) Das charakteristische Polynom ist

$$\begin{aligned} &\det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -5 & 4 \\ 0 & 4-\lambda & -2 \\ 1 & 5 & -2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (3-\lambda)((4-\lambda)(-2-\lambda) + 10) + (10 - (4-\lambda)4) \\ &= -\lambda(\lambda^2 - 5\lambda + 4). \end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind demnach $0, 1, 4$.

d) (*3 Punkte*) Es gilt

$$\begin{aligned} \det(A + A^T) &= \det \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ b+c & 2d \end{pmatrix} \\ &= 4ad - (b+c)^2 \\ &= 4(ad - bc) - (b-c)^2 \\ &= 4\det(A) - (b-c)^2 < 0. \end{aligned}$$

4. (*12 Punkte*)

a) i) RICHTIG. Das folgt direkt aus der obigen DGL.

ii) FALSCH.

iii) FALSCH.

iv) RICHTIG.

b) Wir benutzen die Substitution $u(x) = \frac{y(x)}{x}$. Da $y'(x) = u'(x)x + u(x)$ erhalten wir durch einsetzen dass

$$u'(x)x + u(x) = x^2\Big(3 + u(x)\Big)^2 + u(x).$$

Durch Vereinfachen erhalten wir

$$u'(x) = x\Big(3 + u(x)\Big)^2.$$

Mittels Separation der Variablen erhalten wir

$$\int \frac{du}{(3+u)^2} = \int x\,dx.$$

Daraus folgern wir

$$-\frac{1}{3+u(x)} = \frac{1}{2}x^2 + C$$

und somit

$$u(x) = -\frac{2}{x^2 + 2C} - 3.$$

Durch Rücksubstitution erhalten wir die allgemeine Lösung

$$y(x) = -\frac{2x}{x^2 + 2C} - 3x.$$

Mit dem Anfangswert $y(1) = -4$ folgt dass $C = 0.5$ und somit lautet die Lösung des AWP

$$y(x) = -\frac{2x}{x^2 + 1} - 3x.$$

c) i) Die dazugehörige homogene Differentialgleichung ist von der Form

$$y'(x) - 2x^5 y(x) = 0.$$

Via Separation der Variablen sehen wir direkt, dass die allgemeine Lösung der homogenen DGL von der Form

$$y_{hom}(x) = Ke^{\frac{1}{3}x^6}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

ist.

ii) Um die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu bekommen, verwenden wir die Methode der Variation der Konstanten. Für die allgemeine Lösung y_{allg} verwenden wir den Ansatz

$$y_{allg}(x) = K(x)e^{\frac{1}{3}x^6}.$$

Durch Ableiten erhalten wir

$$y'_{allg}(x) = K'(x)e^{\frac{1}{3}x^6} + 2K(x)x^5e^{\frac{1}{3}x^6}.$$

Durch das Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung erhalten wir

$$K'(x)e^{\frac{1}{3}x^6} + 2K(x)x^5e^{\frac{1}{3}x^6} - 2K(x)x^5e^{\frac{1}{3}x^6} - e^{\frac{1}{3}x^6-2x} = 0.$$

Daraus folgern wir

$$K'(x) = e^{-2x}$$

und deshalb gilt

$$K(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} + \tilde{K}, \quad \tilde{K} \in \mathbb{R}.$$

Durch die Wahl unseres Ansatz schliessen wir, dass

$$y_{allg}(x) = (-\frac{1}{2}e^{-2x} + \tilde{K})e^{\frac{1}{3}x^6} = \tilde{K}e^{\frac{1}{3}x^6} - \frac{1}{2}e^{\frac{1}{3}x^6-2x}.$$

5. (*8 Punkte*)

a) *(2 Punkte)* Es gilt

i) richtig. $\frac{\partial f}{\partial x}(1,-1) = \frac{\partial f}{\partial y}(1,-1) = 0.$

ii) falsch, dieser Punkt ist ein Sattelpunkt.

iii) richtig. $f(x,y) = (x^2+y)^2 + (y^2-1)^2 - 1$, demnach ist $(-1,1)$ ein lokales Minimum. Oder: die kritischen Punkte von f sind: $(0, \pm\frac{\sqrt{2}}{2})$, $(0,0)$ und $(\pm 1, -1)$. Auswerten von $\Delta(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}^2(x,y)$ und Untersuchen von f_{xx} in diesen Punkten ergibt, dass $(-1,-1)$ ein lokales Minimum ist.

iv) falsch. $\Delta(1,-1) > 0$, daher liegt ein lokales Extremum vor.

b) *(2 Punkte)* Die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen von $z = f(x,y)$ im Punkt $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ ist gegeben durch

$$z = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + f(x_0,y_0).$$

Wir haben $\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2}$. Also ist die Gleichung der Tangentialebene gegeben durch

$$z = \frac{1}{2}(x - y + 1).$$

c) *(4 Punkte)* Mittels der Lagrangemultiplikatormethode: Wir definieren

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda(xy-1).$$

Partiell Ableiten nach x, y und λ und Nullsetzen ergibt das Gleichungssystem

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 2x + \lambda y = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 8y^3 + \lambda x = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x,y) = xy - 1 = 0. \end{cases}$$

Man erhält nacheinander die Lösungen $(\sqrt[3]{2}, \frac{\sqrt[3]{4}}{2})$, $(-\sqrt[3]{2}, -\frac{\sqrt[3]{4}}{2})$.

Durch Berechnen der Funktionswerte $f(x,y)$ an diesen Stellen und wegen des asymptotischen Verhaltens von f folgt, dass $f(x,y)$ unter der Nebenbedingung $xy = 1$ seinen Minimalwert $\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}$ an den Stellen $(\sqrt[3]{2}, \frac{\sqrt[3]{4}}{2})$, $(-\sqrt[3]{2}, -\frac{\sqrt[3]{4}}{2})$ und keinen Maximalwert annimmt.

6. (*10 Punkte*)

a) Wir haben

$$\vec{K} \cdot \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2\cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \cos(t) - 2\sin(t),$$

und somit

$$\int_C \vec{K} \cdot \dot{\vec{r}} dt = \int_0^{\pi/2} \cos(t) - 2\sin(t) dt = \sin(t) + 2\cos(t)|_0^{\pi/2} = 1 - 2 = -1.$$

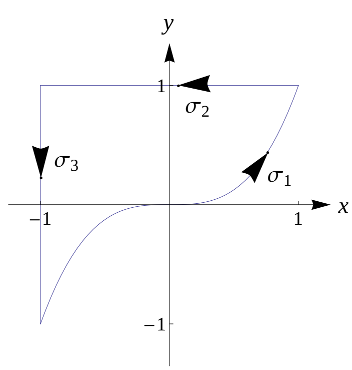
b) Der Weg γ_2 verläuft entlang der Geraden $y = \frac{1}{\pi}x - \frac{1}{2}$ und wir erhalten

$$\gamma_1 : t \mapsto \gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ \cos t \end{pmatrix}, \qquad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\gamma_2 : t \mapsto \gamma_2(t) = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} - t \\ \frac{1}{\pi}(\pi/2 - t) - \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} - t \\ \frac{-t}{\pi} \end{pmatrix}, \qquad 0 \leq t \leq \pi$$

$$\gamma_3 : t \mapsto \gamma_3(t) = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} \\ t \end{pmatrix}, \qquad -1 \leq t \leq 0.$$

c) i)



ii) Für die Rechnung benötigen wir

$$P_y(x,y) = 3$$

und

$$Q_x(x,y) = 1.$$

Nach der Greenschen Formel ist der Wert des gesuchten Kurvenintegrals gleich dem Integral von $Q_x - P_y$ über die von σ eingeschlossene Fläche. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\oint_\sigma K \cdot d\sigma &= \int_{-1}^{1} \int_{x^3}^{1} -2 dy dx \\
&= -2 \int_{-1}^{1} 1 - x^3 dx \\
&= -2(x - \frac{1}{4}x^4)\Big|_{-1}^{1} \\
&= -4.
\end{aligned}$$