Dr. A. Caspar **ETH Zürich, Winter 2015**

BIOL-B HST PHARM

Prüfung zur Vorlesung Mathematik I/II

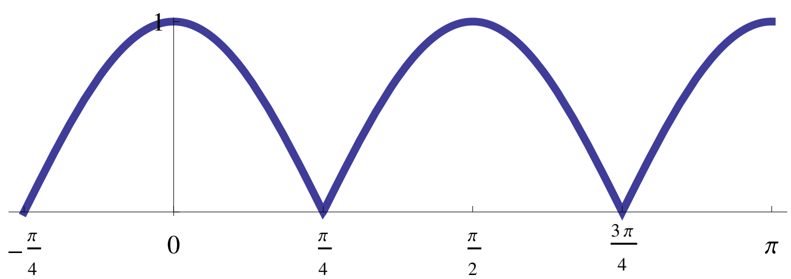
---

1. (*8 Punkte*)

a) Wir haben $x_n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, darum

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$

b) Der Graph:



c) Durch das Additionstheorem für cos sehen wir, dass

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\cos^2(x) - \sin^2(x)\right| dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\cos(2x)\right| dx \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x)\, dx \\ &= \sin(2y)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= 1.\end{aligned}$$

d) Sei x_∞ ein Fixpunkt von f. Das heisst

$$x_\infty = \arccos(\sin(x_\infty)).$$

Deshalb haben wir

$$\cos(x_\infty) = \sin(x_\infty),$$

und $x_\infty = \frac{\pi}{4}$.

e) Die angegebenen Gleichungen erfüllt werden, wenn 2 und 3 die Fixpunkte der Funktion f sind, d.h.

$$0 = (x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6 = f(x) - x = x^2 + (a-1)x + b.$$

Also sind $a = -4$ und $b = 6$.

f) Die Funktion f ist stetig genau dann, wenn

$$\frac{a^2}{4}x^2 - 5a + 8\Big|_{x=2} = x^2\Big|_{x=2}.$$

Durch Einsetzen erhalten wir die Gleichung

$$a^2 - 5a + 4 = 0$$

als Bedingung an a. Diese Gleichung wird gelöst durch

$$a_1 = 1 \qquad a_2 = 4.$$

Deshalb gilt:

richtig	**falsch**	
$\otimes$	$\bigcirc$	$a = 1.$
$\bigcirc$	$\otimes$	$a = 2.$
$\bigcirc$	$\otimes$	$a = 3.$
$\otimes$	$\bigcirc$	$a = 4.$

2. (*14 Punkte*)

a) Man berechnet $A = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & -2ab \\ 2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix}$. Daraus folgt $ab = 2$ und $b^2 - a^2 = 3$. Dann

$$(a_1, b_1) = (1, 2) \qquad\qquad (a_2, b_2) = (-1, -2)$$

b) Charakteristisches Polynom von A ist $\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + b^2$ mit Diskriminante $-4b^2$. A hat genau einen Eigenwert wenn Diskriminante Null ist. Dass heisst $b = 0$.

c)

richtig	**falsch**	
$\otimes$	$\bigcirc$	B ist invertierbar.
$\bigcirc$	$\otimes$	B ist symmetrisch.
$\bigcirc$	$\otimes$	$B^2 = B$.
$\otimes$	$\bigcirc$	$\det(B) = \det(A)$.

d) Charakteristisches Polynom der Matrix $\begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist

$$\det\left(\begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \lambda I_3\right) = (1 - \lambda)(\lambda^2 + 6\lambda + 25).$$

Die Eigenwerte sind

$$\lambda_1 = -3 + 4i, \qquad \lambda_2 = -3 - 4i, \qquad \lambda_3 = 1.$$

e) MC-Aufgabe

richtig	**falsch**	
$\bigcirc$	$\otimes$	Jeder Eigenwert hat Betrag 1.
$\otimes$	$\bigcirc$	Genau ein Eigenwert liegt auf der reellen Achse.
$\bigcirc$	$\otimes$	Genau ein Eigenwert hat als Argument φ mit $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$.
$\otimes$	$\bigcirc$	Genau ein Eigenwert hat als Argument φ mit $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$.

f) Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor von $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ wenn

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix},$$

d.h. $x - y = \lambda x$ und $2y = \lambda y$. Dann entweder $\lambda = 2$ und

$$(x_1, y_1) = (1, -1),$$

oder $y = 0$ und dann $\lambda = 1$ und

$$(x_2, y_2) = (1, 0).$$

g) v_1, v_2, v_3 sind linear unabhängig, wenn

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & t \\ t & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Die Determinante ist

$$t(3t - 4).$$

Deshalb muss $t \neq 0$ und $t \neq \frac{4}{3}$ gelten.

3. (*12 Punkte*)

a) Characteristisches Polynom:

$$\lambda^2 + a\lambda + b$$

mit Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

richtig	falsch	
$\otimes$	$\bigcirc$	$a = 6, \quad b = 5.$
$\bigcirc$	$\otimes$	$a = 6, \quad b = -5.$
$\bigcirc$	$\otimes$	$a = -4, \quad b = 3.$
$\otimes$	$\bigcirc$	$a = 4, \quad b = 3.$

b) Die **Richtungsfelder 1 und 3** sind nicht korrekt.

c) Mittels Separation der Variablen erhalten wir

$$\frac{1}{y} dy = (x^2 + 1) dx.$$

Dann durch Integration

$$\log y = \frac{x^3}{3} + x + K \qquad \Longrightarrow \qquad y = K \exp\left(\frac{x^3}{3} + x\right).$$

Mittels Anfangswert erhalten wir

$$K = 2,$$

deshalb ist die Lösung

$$y = 2 \exp\left(\frac{x^3}{3} + x\right).$$

d) i) Die zugehörige homogene Differentialgleichung ist von der Form

$$y'(x) + \cos(x) y(x) = 0.$$

Die allgemeine Lösung ist

$$y(x) = K e^{-\sin(x)}.$$

ii) Um die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu finden, verwenden wir die Methode der Variation der Konstanten. Für die allgemeine Lösung y_{allg} verwenden wir den Ansatz

$$y_{\text{allg}} = K(x)e^{-\sin(x)}.$$

Durch Ableiten erhalten wir

$$y'_{\text{allg}} = K'(x)e^{-\sin(x)} - K(x)\cos(x)e^{-\sin(x)}.$$

Durch Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung erhalten wir

$$K'(x)e^{-\sin(x)} - \cos(x)K(x)e^{-\sin(x)} + \cos(x)K(x)e^{-\sin(x)} = (\cos(x) - \sin(x))e^{\cos(x)}.$$

Daraus folgern wir, dass

$$K'(x) = (\cos(x) - \sin(x))e^{\cos(x)+\sin(x)},$$

und deshalb gilt

$$K(x) = e^{\cos(x)+\sin(x)} + \widetilde{K}.$$

Durch die Wahl unseres Ansatzes schliessen wir

$$y_{\text{allg}} = (e^{\cos(x)+\sin(x)} + \widetilde{K})e^{-\sin(x)} = \widetilde{K}e^{-\sin(x)} + e^{\cos(x)},$$

wobei $\widetilde{K} \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist.

4. (*12 Punkte*)

a) Es ist

$$f_x(x,y) = y\varphi'(xy), \qquad\qquad f_y(x,y) = x\varphi'(xy).$$

b) i) Wir wissen, dass

$$f(1,1) = \varphi(1) = 1,$$

das heisst, dass $P_0 = (1,1,1)$ ist.

ii) Wir wissen, dass

$$\varphi'(t) = (t^7 + 7t^6)e^{t-1} \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi'(1) = 8.$$

Deshalb gilt $f_x(1,1) = f_y(1,1) = 8$. Mittels der Formel für die Tangentialebene erhalten wir

$$0 = 8(x-1) + 8(y-1) + 1 = 8x + 8y - 15$$

als Gleichung der Tangentialebene, die $(1,1,1)$ liegt über.

c) Wir haben, dass

$$\operatorname{div} K = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3.$$

d) Aus **d)** wissen wir, dass $\operatorname{div}(K) = 3$ gilt. Dies ergibt

$$\begin{aligned}
\iiint_B \operatorname{div}(K)\, dV &= 3 \iiint_B dV \\
&= 3 \int_0^1 \int_{-1}^1 \int_{x^2-1}^{1-|x|} dydxdz \\
&= 3 \int_{-1}^1 \int_{x^2-1}^{1-|x|} dydx \\
&= 6 \int_0^1 \int_{x^2-1}^{1-|x|} dydx \\
&= 6 \int_0^1 (2 - x - x^2)\, dx \\
&= 6\Big(2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big)\Big|_0^1 = 7.
\end{aligned}$$

ALTERNATIVE LÖSUNG:

$$\iiint_B \operatorname{div}(K)\, dV = 3 \iiint_B dV = 3 \times \text{Oberfläche der } S$$

Und

$$3 \times \text{Oberfläche der } S = 3 \times \left(2 \int_0^1 (1-x)dx + 2 \int_0^1 (1-x^2)dx\right) = 3 \times \left(1 + \frac{4}{3}\right) = 7.$$

5. a)

richtig	falsch	
○	⊗	Das Vektorfeld $K_1(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy + 7x^3y^6 \\ x^2 + 5x^4y^5 \end{pmatrix}$ ist konservativ.
⊗	○	Das Vektorfeld $K_2(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2xy}{(x^2+1)^2} \\ -\frac{1}{x^2+1} \end{pmatrix}$ ist konservativ.
⊗	○	Es gibt ein Vektorfeld F mit $\operatorname{rot}(F) = K_3$, wobei $K_3(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^{y-z} \\ e^{z-x} \\ e^{x-y} \end{pmatrix}$.
○	⊗	Es gibt ein Vektorfeld F mit $\operatorname{rot}(F) = K_4$, wobei $K_4(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^{x-y} \\ e^{y-z} \\ e^{z-x} \end{pmatrix}$.

b)

richtig	falsch	
⊗	○	$\{(x,y) \mid x^2 + y = 0\}$
○	⊗	$\{(x,y) \mid x + y^2 = 0\}$
○	⊗	$\{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$
⊗	○	$\{(x,y) \mid x^4 + 2x^2y + y^2 = 0\}$

c)

$$\sigma_1 : t \mapsto \sigma_1(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix}, \qquad 0 \le t \le 1.$$

$$\sigma_2 : t \mapsto \sigma_2(t) = \begin{pmatrix} -t \\ 1-t \end{pmatrix}, \qquad 0 \le t \le 1.$$

$$\sigma_3 : t \mapsto \sigma_3(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2-1 \end{pmatrix}, \qquad -1 \le t \le 1.$$

d) Bei σ_1: $\dot{x} = -1,\ \dot{y} = 1 \quad \Rightarrow$

$$I_1 = \int_{\sigma_1} K \cdot d\gamma = \int_0^1 [-1 \cdot (1-t-t) + 1 \cdot t]\ dt = \int_0^1 [3t-1] dt = \frac{1}{2}.$$

Bei σ_2: $\dot{x} = -1,\ \dot{y} = -1 \quad \Rightarrow$

$$I_2 = \int_{\sigma_2} K \cdot d\gamma = \int_0^1 [-1 \cdot (-t+t-1) - 1 \cdot (1-t)]\ dt = \int_0^1 t\ dt = \frac{1}{2}.$$

Bei σ_3: $\dot{x} = 1,\ \dot{y} = 2t \quad \Rightarrow$

$$I_3 = \int_{\sigma_3} K \cdot d\gamma = \int_{-1}^1 [1 \cdot (t+1-t^2) + 2t \cdot (t^2-1)]\ dt = \int_{-1}^1 [2t^3 - t^2 - t + 1] dt = \frac{4}{3}.$$

e) i) Von Teil **d)** haben wir

$$\oint_\sigma K \cdot d\gamma = \int_{\sigma_1} K \cdot d\gamma + \int_{\sigma_2} K \cdot d\gamma + \int_{\sigma_3} K \cdot d\gamma = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{4}{3} = \frac{7}{3}$$

ii) Green'sche formula gibt

$$\oint_\sigma P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_S Q_x(x,y) - P_y(x,y) dx\, dy = \iint_S 1\ dx\, dy = \frac{7}{3}.$$