Dr. A. Caspar **ETH Zürich, Winter 2015**

BIOL HST PHARM

Prüfung zur Vorlesung Mathematik I/II

Bitte ausfüllen!

Name:	
Vorname:	
Legi-Nr.:	

Nicht ausfüllen!

Aufgabe	Punkte		Kontrolle	
	MC	Total	MC	Total
1				
2				
3				
4				
5				
Total				

Vollständigkeit	

Bitte wenden!

Wichtige Hinweise zur Prüfung

Prüfungsdauer: 3 Stunden.

Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten (nicht Blätter!) mit persönlichen, von Hand geschriebenen Notizen. Keine (Taschen)Rechner. 1 Wörterbuch für fremdsprachige Studierende.

Bitte beachten Sie folgende Punkte:

- Tragen Sie **jetzt** Ihren Namen in das Deckblatt ein, und geben Sie es **am Ende** der Prüfung als vorderstes Blatt Ihrer Arbeit ab.
- Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch.
- Beginnen Sie jede Aufgabe **auf einem neuen Blatt**.
- Begründen Sie Ihre Lösungen, soweit nicht anders angegeben. Dabei können Sie bekannte Formeln aus der Vorlesung und den Übungen ohne Herleitung verwenden.
- Schreiben Sie **nicht** mit Bleistift und **nicht** mit roter oder grüner Farbe.
- Die Reihenfolge der Bearbeitung der Aufgaben ist Ihnen freigestellt. Ordnen Sie jedoch am Ende der Prüfung die Aufgaben für die Abgabe.
- Wir erwarten nicht, dass Sie alle Aufgaben lösen. Versuchen Sie einfach Ihr Bestes!
  Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet.
- Bei einer **Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe)** sind jeweils 4 Aussagen/Antworten angegeben, davon sind jeweils genau 2 korrekt.

  Eine MC-Aufgabe ist genau dann korrekt gelöst, wenn Sie die 2 korrekten Antworten mit "richtig" **und** die 2 inkorrekten mit "falsch" kennzeichnen. Sie müssen also bei jeder MC-Aufgabe genau 4 Kreuze setzen und jedes muss jeweils an der richtigen Stelle sein.

  Zum Beispiel ist folgende MC-Aufgabe nur mit diesen 4 Kreuzen korrekt gelöst.

richtig	**falsch**	
$\otimes$	$\bigcirc$	Hier steht eine korrekte Aussage/Antwort.
$\otimes$	$\bigcirc$	Hier steht eine korrekte Aussage/Antwort.
$\bigcirc$	$\otimes$	Hier steht eine inkorrekte Aussage/Antwort.
$\bigcirc$	$\otimes$	Hier steht eine inkorrekte Aussage/Antwort.

  Bei den MC-Aufgaben werden nur die Antworten auf den **Aufgabenblättern** bewertet. Die Antworten in den MC-Aufgaben müssen nicht begründet werden.

$\boxed{\text{Viel Erfolg!}}$

Siehe nächstes Blatt!

Aufgaben

---

1. (*8 Punkte*)

Die Antworten in dieser Aufgabe müssen Sie **nicht** begründen. Schreiben Sie die Antworten **vollständig gekürzt und vereinfacht** direkt auf das Aufgabenblatt. Antworten auf anderen Blättern werden nicht bewertet.

a) Gegeben sei die Folge $(x_n)_n$ mit $x_n = \sum_{i=1}^{n} i$. Berechnen Sie

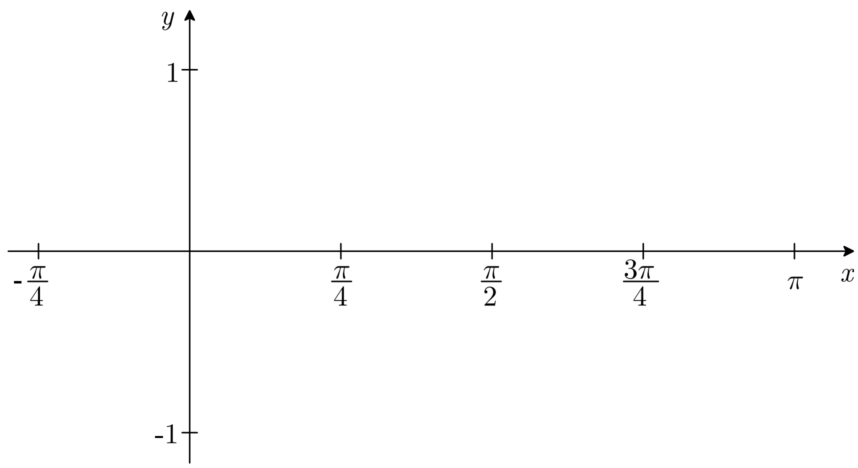
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n^2} = \rule{3cm}{0.4pt}$$

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst die Summe $x_n = \sum_{i=1}^{n} i$.

b) Gegeben sei die Funktion

$$f : [0,\pi] \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto f(x) = \left|\cos^2(x) - \sin^2(x)\right| .$$

Skizzieren Sie den Graphen G_f in folgendem Koordinatensystem.
Hinweis: Verwenden Sie $\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$.



c) Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\cos^2(x) - \sin^2(x)\right| dx = \rule{3cm}{0.4pt}.$$

d) Gegeben sei die Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \arccos(\sin(x))$.

Bestimmen Sie den Fixpunkt $x_\infty \in [-1,1]$

$$x_\infty = \rule{3cm}{0.4pt}.$$

Bitte wenden!

e) Seien a und b reelle Zahlen und f eine Funktion mit $f(x) = x^2 + ax + b$ und der Eigenschaft, dass

$$(\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{2014\ \text{Stück}})(2) = 2, \qquad (\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{2015\ \text{Stück}})(3) = 3.$$

Bestimmen Sie

$a =$ ____________, $\qquad b =$ ____________.

f) MC-Aufgabe

Seien a eine reelle Zahl und f eine Funktion mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a^2}{4}x^2 - 5a + 8, & x \geq 2, \\ x^2, & x < 2. \end{cases}$$

Für welche a ist f stetig?

Kreuzen Sie Ihre Antwort direkt **auf dem Aufgabenblatt** an.

richtig	**falsch**	
○	○	$a = 1$.
○	○	$a = 2$.
○	○	$a = 3$.
○	○	$a = 4$.

2. (*14 Punkte*)

Die Antworten in dieser Aufgabe ausser Teil **g)** müssen Sie **nicht** begründen. Schreiben Sie die Antworten **vollständig gekürzt und vereinfacht** direkt auf das Aufgabenblatt. Antworten auf anderen Blättern werden nicht bewertet.

Es ist $i^2 = -1$ die imaginäre Einheit.

a) Seien a und b reelle Zahlen und $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ eine Matrix.

Finden Sie ein Paar (a, b) mit $A^2 = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$:

$a =$ ____________, $b =$ ____________.

b) Seien a und b reelle Zahlen und $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ eine Matrix.

Finden Sie ein b, so dass A genau einen Eigenwert hat:

$b =$ ____________.

c) MC-Aufgabe

Seien a und b reelle Zahlen und $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Matrizen.

Welche der folgenden Aussagen sind für alle Paare $(a, b) \neq (0, 0)$ richtig ?

Kreuzen Sie Ihre Antwort direkt **auf dem Aufgabenblatt** an.

richtig	**falsch**	
○	○	B ist invertierbar.
○	○	B ist symmetrisch.
○	○	$B^2 = B$.
○	○	$\det(B) = \det(A)$.

d) Bestimmen Sie die Eigenwerte λ_1, λ_2 und λ_3 der Matrix $\begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$\lambda_1 =$ ______________, $\lambda_2 =$ ______________, $\lambda_3 =$ ______________.

e) MC-Aufgabe

Wir betrachten die Eigenwerte λ_1, λ_2 und λ_3 aus Teil **d)** in der komplexen Zahlenebene. Welche der folgenden Aussagen sind richtig ?

Kreuzen Sie Ihre Antwort direkt **auf dem Aufgabenblatt** an.

richtig	**falsch**	
○	○	Jeder Eigenwert hat Betrag 1.
○	○	Genau ein Eigenwert liegt auf der reellen Achse.
○	○	Genau ein Eigenwert hat als Argument φ mit $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$.
○	○	Genau ein Eigenwert hat als Argument φ mit $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$.

Hinweis: Falls Sie Teil **d)** nicht lösen konnten, wählen Sie für diese Aufgabe die Werte:

$$\lambda_1 = (\sqrt{3} + i)^4, \qquad \lambda_2 = (\sqrt{3} - i)^4, \qquad \lambda_3 = -1.$$

f) Sei $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Finden Sie ein Paar (x, y), so dass $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von C ist.

$$x = \underline{\hspace{3em}} \qquad y = \underline{\hspace{3em}}.$$

Siehe nächstes Blatt!

g) Für welche $t \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ t \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig?

Schreiben Sie Ihre Rechnung und Lösung **hier auf das Aufgabenblatt**.

Bitte wenden!

3. (*12 Punkte*)

a) MC-Aufgabe

Wir betrachten die Differentialgleichung (DGL)

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0. \tag{1}$$

Für welche a und b konvergiert die allgemeine Lösung von (1) gegen Null, für $t \to \infty$? Kreuzen Sie Ihre Antwort direkt **auf dem Aufgabenblatt** an.

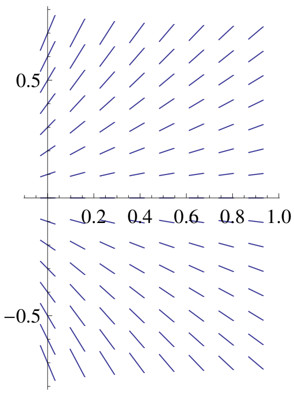
richtig	**falsch**	
○	○	$a = 6, \quad b = 5.$
○	○	$a = 6, \quad b = -5.$
○	○	$a = -4, \quad b = 3.$
○	○	$a = 4, \quad b = 3.$

b) Wir betrachten die Differentialgleichung (DGL)

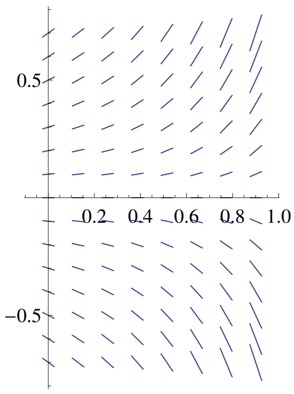
$$y'(x) = y(x)(x^2 + 1). \tag{2}$$

Welche Richtungsfelder passen **NICHT** zu der obigen Differentialgleichung (2)?

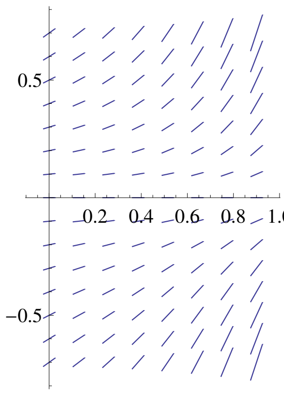
Richtungsfeld 1



Richtungsfeld 2



Richtungsfeld 3



Tragen Sie Ihre Antworten **hier** ein:

Richtungsfelder ______ und ______.

c) Bestimmen Sie die Lösung der DGL (2) aus Teil **b)** mit dem Anfangswert $y(0) = 2$ mittels Trennung der Variablen.

d) Wir betrachten die folgende Differentialgleichung

$$y'(x) + \cos(x)y = (\cos(x) - \sin(x))e^{\cos(x)}. \tag{3}$$

i) Schreiben Sie die dazugehörige homogene Differentialgleichung auf. Bestimmen Sie deren allgemeine Lösung.

ii) Bestimmen Sie nun die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (3) mittels Variation der Konstanten.

Siehe nächstes Blatt!

4. (*12 Punkte*)

a) MC-Aufgabe

Gegeben sei eine differenzierbare Funktionen in einer Variablen

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad t \mapsto \varphi(t)$$

mit Ableitungsfunktion $\varphi' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \varphi'(t)$ und eine Funktion in zwei Variablen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto f(x, y) = \varphi(xy).$$

Welche der folgenden Aussagen über die partiellen Ableitungen von f sind richtig?

Kreuzen Sie die entsprechende Antwort direkt **auf dem Aufgabenblatt** an.

richtig	**falsch**	
◯	◯	$f_x(x, y) = y\varphi'(xy)$
◯	◯	$f_x(x, y) = x\varphi'(xy)$
◯	◯	$f_y(x, y) = x\varphi'(xy)$
◯	◯	$f_y(x, y) = y\varphi'(xy)$

b) Seien φ und f wie in **a)** mit $\varphi(t) = t^7 e^{t-1}$ und der Eulerschen Zahl $e = 2,71828\ldots$
Sei G_f der Graph von f.

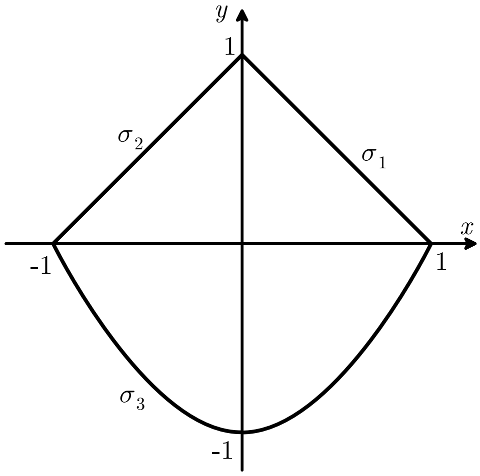
i) Bestimmen Sie die z-Koordinate für den Flächenpunkt $P_0 = (1, 1, z)$ auf G_f.
ii) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an G_f in P_0.

c) Sei $K : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld mit $K(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie die Divergenz $\operatorname{div}(K)$.

Bitte wenden!

d) In der folgenden Skizze sehen Sie eine Fläche S in der (x, y)-Ebene, welche durch drei ebene Kurven σ_1, σ_2 und σ_3 begrenzt ist.



Dabei liegen σ_1 und σ_2 jeweils auf einer Geraden, und σ_3 ist ein Ausschnitt der Parabel $y = x^2 - 1$.

Sei $\widetilde{S}$ eine Fläche im Raum $\mathbb{R}^3$, welche parallel über S in Höhe $z = 1$ liegt.

Sei B der Körper mit Boden S und Deckel $\widetilde{S}$.

Sei $K : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld mit $K(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ wie in Teil **c)**. Berechnen Sie

$$\iiint_B \operatorname{div}(K)\, dV.$$

Hinweis: Die Fläche zwischen der Kurve σ_3 und der x-Achse hat den Inhalt $\dfrac{4}{3}$.

Siehe nächstes Blatt!

5. (*14 Punkte*)

a) MC-Aufgabe

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind, und kreuzen Sie die entsprechende Antwort direkt **auf dem Aufgabenblatt** an.

richtig	falsch	
○	○	Das Vektorfeld K_1 mit $K_1(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy + 7x^3y^6 \\ x^2 + 5x^4y^5 \end{pmatrix}$ ist konservativ.
○	○	Das Vektorfeld K_2 mit $K_2(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2xy}{(x^2+1)^2} \\ -\frac{1}{x^2+1} \end{pmatrix}$ ist konservativ.
○	○	Es gibt ein Vektorfeld F mit $\mathrm{rot}(F) = K_3$ und $K_3(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^{y-z} \\ e^{z-x} \\ e^{x-y} \end{pmatrix}$.
○	○	Es gibt ein Vektorfeld F mit $\mathrm{rot}(F) = K_4$ und $K_4(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^{x-y} \\ e^{y-z} \\ e^{z-x} \end{pmatrix}$.

b) MC-Aufgabe

Gegeben sei eine Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit

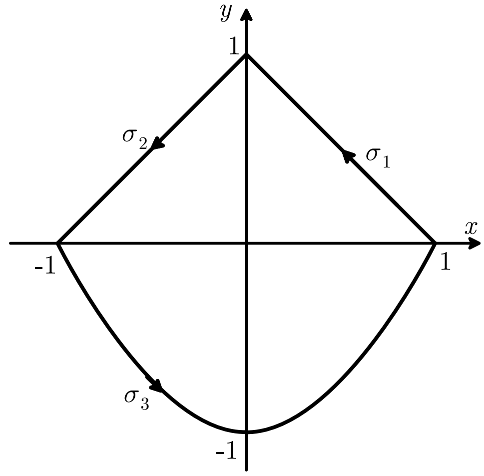
$$t \mapsto \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin^2(t) - 1 \end{pmatrix}.$$

Auf welchen der folgenden ebenen Kurven liegt γ ?

Kreuzen Sie die entsprechende Antwort direkt **auf dem Aufgabenblatt** an.

richtig	falsch	
○	○	$\{(x,y) \mid x^2 + y = 0\}$
○	○	$\{(x,y) \mid x + y^2 = 0\}$
○	○	$\{(x,y) \mid x^2 + y^2 - 1 = 0\}$
○	○	$\{(x,y) \mid x^4 + 2x^2y + y^2 = 0\}$

c) In folgender Skizze sehen Sie eine Fläche S in der (x, y)-Ebene, welche durch drei ebene Kurven σ_1, σ_2 und σ_3 begrenzt ist.



Dabei liegen σ_1 und σ_2 jeweils auf einer Geraden, und σ_3 ist ein Ausschnitt der Parabel $y = x^2 - 1$. Die Pfeile kennzeichnen die Durchlaufrichtung.

Geben Sie für σ_1, σ_2 und σ_3 jeweils eine Funktion an, welche die Kurve parametrisiert. Berücksichtigen Sie dabei die Durchlaufrichtung.

Schreiben Sie Ihre Antwort direkt **auf das Aufgabenblatt**.

$$\sigma_1 : t \mapsto \sigma_1(t) = \begin{pmatrix} \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \qquad \_\_\_\_\_\_ \leq t \leq \_\_\_\_\_\_.$$

$$\sigma_2 : t \mapsto \sigma_2(t) = \begin{pmatrix} \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \qquad \_\_\_\_\_\_ \leq t \leq \_\_\_\_\_\_.$$

$$\sigma_3 : t \mapsto \sigma_3(t) = \begin{pmatrix} \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \qquad \_\_\_\_\_\_ \leq t \leq \_\_\_\_\_\_.$$

d) Seien σ_1, σ_2 und σ_3 die Kurven aus Teil **c)** und $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld

$$K : (x, y) \mapsto K(x, y) = \begin{pmatrix} x - y \\ y \end{pmatrix}.$$

Das Kurvenintegral entlang σ_3 ist $\int_{\sigma_3} K \cdot \mathrm{d}\gamma = \frac{4}{3}$. Berechnen Sie die Kurvenintegrale

$$\int_{\sigma_1} K \cdot \mathrm{d}\gamma \qquad \text{und} \qquad \int_{\sigma_2} K \cdot \mathrm{d}\gamma.$$

e) Seien σ die Kurve, welche nacheinander σ_1, σ_2 und σ_3 durchläuft, und K das Vektorfeld in Teil **d)**. Berechnen Sie $\oint_\sigma K \cdot d\gamma$ **auf zwei Arten**:

i. mit Hilfe von Teil **d)**,
ii. mit Hilfe der Formel von Green.