Prof. Dr. E. W. Farkas **ETH Zürich, Februar 2016**

D–BIOL, D–CHAB

Lösungen zu Mathematik I/II

Aufgaben

---

1. (*10 Punkte*)

a) Für $n = 1, 2, \ldots$ haben wir $\cos(2n\pi) = 1$. Somit gilt $a_n = n/(n+1)$ und

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

b) Es gilt

$$0 < \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) < 1$$

und somit folgt

$$\lim_{x\to\infty} \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)^x = 0.$$

c)

$$\log(2x^3 + 2x^2 + 2) - \log(x^3 + x + 1) = \log\left(\frac{2x^3 + 2x^2 + 2}{x^3 + x + 1}\right) \xrightarrow[x\to\infty]{} \log 2.$$

d)

$$\int_0^2 |x^2-1| = \int_0^1 (1-x^2)dx + \int_1^2 (x^2-1)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^2 = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2.$$

e) Es muss gelten

$$Aq - Ax + Bp - Bx = 1.$$

Daraus folgt $Aq + Bp = 1$ und $A + B = 0$. Das heisst $A = \frac{1}{q-p}$ und $B = \frac{1}{p-q}$.

f) Die erste und zweite Ableitung von g für $x < 1$ sind $e^{2x} + 2xe^{2x}$ und $4e^{2x} + 4xe^{2x}$. Folgende Gleichungen müssen also erfüllt sein

$$\begin{aligned} e^2 &= a + b + c \\ 3e^2 &= 2a + b \\ 8e^2 &= 2a. \end{aligned}$$

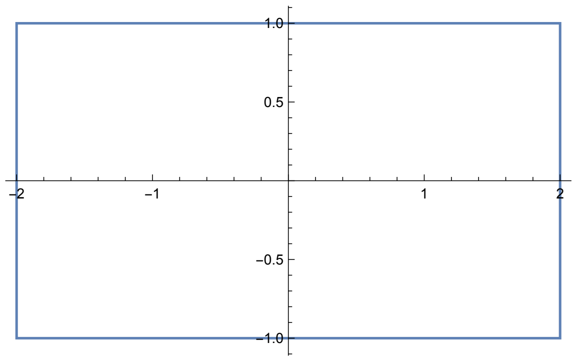
Somit gilt $a = 4e^2$, $b = -5e^2$, $c = 2e^2$.

2. (*10 Punkte*)

a)

$$\overline{3i\left(\frac{1}{3}+2i\right)} = -6-i, \quad \frac{2+5i}{1-3i} = -\frac{13}{10}+\frac{11}{10}i, \quad i^{47} = -i.$$

b) Es ist die Menge innerhalb des folgenden Rechtecks inklusive Rand.



c) $z = 2^{-25}2^{25}(e^{-i\pi/4})^{50} = e^{-\frac{25}{2}\pi i} = e^{-\frac{1}{2}\pi i} = -i$. Das heisst $r = 1, \varphi = \frac{3}{2}\pi$ und $a = 0, b = -1$.

d) $d = 2$.

e) $z_1 = 2, z_2 = 2e^{\frac{2}{3}\pi i}, z_3 = 2e^{\frac{4}{3}\pi i}$.

3. (*10 Punkte*)

a)

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & \lambda \end{pmatrix} = 1\cdot(-3) - 2\cdot(2\lambda-3) + 2\cdot 2 = -4\lambda + 7.$$

Die Matrix ist für $\lambda \neq \frac{7}{4}$ invertierbar.

b) i) Wir müssen folgendes Gleichungssystem lösen

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -3 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Mit dem Gauss-Verfahren haben wir:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 14 \\ 2 & -1 & -3 & 3 \\ 4 & 5 & -1 & 7 \end{array}\right)$$

Addiere -2 mal die erste Zeile zur zweiten Zeile, addiere -4 mal die erste Zeile zur dritten Zeile

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 14 \\ 0 & -7 & -13 & -25 \\ 0 & -7 & -21 & -49 \end{array}\right)$$

Addiere -1 mal die zweite Zeile zur dritten Zeile

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 14 \\ 0 & -7 & -13 & -25 \\ 0 & 0 & -8 & -24 \end{array}\right)$$

Multipliziere die zweite Zeile mit $-\frac{1}{7}$, multipliziere die dritte Zeile mit $-\frac{1}{8}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 14 \\ 0 & 1 & \frac{13}{7} & \frac{25}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Addiere $-\frac{13}{7}$ mal die dritte Zeile zur zweiten Zeile

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Addiere -3 mal die zweite Zeile zur ersten Zeile, addiere -5 die dritte Zeile zur ersten Zeile

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Die Lösung ist somit

$$x = 5, \quad y = -2, \quad z = 3.$$

ii) Die Vektoren sind nicht linear unabhängig, da eine nicht-triviale Linearkombination von v_1, v_2, v_3, v_4 existiert, die gleich 0 ist.

c) i) Ein Vektor $(v_1 \quad v_2 \quad v_3)^T$ ist ein Eigenvektor von A zum Eigenwert 1 falls

$$\begin{array}{rrrl} & v_2 & +v_3 & = v_1 \\ -v_1+ & 2v_2 & +v_3 & = v_2 \\ -v_1- & v_2 & +4v_3 & = v_3 \end{array}$$

Setzen wir die erste Gleichung in die dritte ein, erhalten wir $v_2 = v_3$. Das eingesetzt in die erste Gleichung ergibt $v_1 = 2v_2$. Der Eigenvektor muss also die Form $c\,(2 \quad 1 \quad 1)^T$ haben.

ii) Das charakteristische Polynom von A ist

$$\begin{aligned} P(x) = \begin{vmatrix} -x & 1 & 1 \\ -1 & 2-x & 1 \\ -1 & -1 & 4-x \end{vmatrix} &= -x((2-x)(4-x)+1) + ((4-x)+1) - (1-(2-x)) \\ &= -x^3 + 6x^2 - 11x + 6. \end{aligned}$$

Da 1 ein Eigenwert von A ist, können wir $P(x)$ faktorisieren zu

$$P(x) = (x-1)(-x^2+5x-6) = -(x-1)(x-2)(x-3).$$

Die Eigenwerte von A sind also $1, 2, 3$.

d) Falls v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert c ist, dann gilt

$$Av = cv.$$

Das heisst es gilt $v = A^{-1}cv$ und somit

$$A^{-1}v = c^{-1}v.$$

Also sind $(1 \quad 1)^T$ and $(2 \quad -3)^T$ Eigenvektoren von A^{-1} zu den Eigenwerten $1/3$ and $-1/2$.

4. (*10 Punkte*)

a) i) Die homogene Differentialgleichung ist

$$y' - \frac{3}{x}y = 0.$$

Separation der Variablen ergibt

$$\frac{dy}{y} = 3\frac{dx}{x}.$$

Wir integrieren beide Seiten und erhalten (beachte $x > 0$)

$$y_H(x) = \exp\left(\int \frac{3}{x}dx\right) = \exp(3\ln x + C_0) = C_1x^3$$

wobei C_0 und C_1 zwei beliebige Konstanten sind.

ii) Unser Ansatz für die allgemeine Lösung ist

$$y(x) = C(x)x^3.$$

Somit muss $C(x)$ erfüllen

$$C'(x)x^3 + C(x)3x^2 - 3C(x)x^2 = x.$$

Das heisst

$$C'(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Daraus folgt

$$C(x) = \int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + C_2$$

wobei C_2 eine beliebige Konstante ist. Die allgemeine Lösung ist also

$$y(x) = -x^2 + C_2x^3.$$

iii) Wir müssen die Konstante C_2 bestimmen. Für die Bedingung $y(1) = 2$ muss gelten

$$y(1) = -1 + C_2 = 2.$$

Es gilt somit $C_2 = 3$ und die gesuchte Lösung ist

$$y(x) = -x^2 + 3x^3.$$

b) i) Die homogene Differentialgleichung ist

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

Die charakteristische Gleichung ist somit

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$$

mit den Nullstellen $\lambda_1 = -1+2i, \lambda_2 = -1-2i$. Die allgemeine Lösung hat also die Form

$$y = e^{-x} \left(C_1 \cos(2x) + C_2(\sin(2x)) \right).$$

ii) Setzen wir $y(x) = A\sin(2x) + B\cos(2x)$ in die ursprüngliche Gleichung ein, erhalten wir

$$-4A\sin(2x) - 4B\cos(2x) + 2\left(2A\cos(2x) - 2B\sin(2x)\right) + 5\left(A\sin(2x) + B\cos(2x)\right) = \sin(2x).$$

Daraus folgt

$$(-4A - 4B + 5A - 1)\sin(2x) + (-4B + 4A + 5B)\cos(2x) = 0$$

und somit

$$\begin{aligned} A - 4B - 1 &= 0 \\ B + 4A &= 0. \end{aligned}$$

Wir schliessen daraus $A = \frac{1}{17}, B = -\frac{4}{17}$.

iii) Die allgemeine Lösung ist

$$y(x) = e^{-x} \left(C_1 \cos(2x) + C_2(\sin(2x)) \right) + \frac{1}{17}\sin(2x) - \frac{4}{17}\cos(2x).$$

5. (*10 Punkte*)

a) Wir berechnen zuerst die partiellen Ableitungen von $z = f(x,y) = \sin(x)\cos(y)$ und erhalten $f_x(x,y) = \cos(x)\cos(y)$ und $f_y(x,y) = -\sin(x)\sin(y)$.

Die Tangetialebene im Punkt $(0, \pi, 0)$ ist

$$z = -x.$$

Die Tangentialebene im Punkt $(\frac{\pi}{2}, \pi, -1)$ ist

$$z + 1 = 0.$$

b) Die ersten partiellen Ableitungen sind

$$f_x(x,y) = 3x^2 + 6x - 9$$
$$f_y(x,y) = 3y^2 - 12.$$

Kritische Punkte erfüllen die Gleichungen $f_x(x,y) = 0, f_y(x,y) = 0$ gleichzeitig. Somit sind die kritischen Punkte $(1,2), (1,-2), (-3,2), (-3,-2)$.

Die zweiten partiellen Ableitungen sind

$$f_{xx}(x,y) = 6x + 6$$
$$f_{yy}(x,y) = 6y$$
$$f_{xy}(x,y) = 0.$$

Für den Punkt $(1,2)$ haben wir

$$f_{xx}(1,2)f_{yy}(1,2) - f_{xy}^2(1,2) = 12 \cdot 12 > 0.$$

Das heisst, dass f ein lokales Minimum im Punkt $(1,2)$ hat.

Für den Punkt $(1,-2)$ haben wir

$$f_{xx}(1,-2)f_{yy}(1,-2) - f_{xy}^2(1,-2) = 12 \cdot (-12) < 0.$$

Somit hat f einen Sattlepunkt an der Stelle $(1,2)$.

Für den Punkt $(-3,2)$ haben wir

$$f_{xx}(-3,2)f_{yy}(-3,2) - f_{xy}^2(-3,2) = -12 \cdot 12 < 0.$$

Somit hat f einen Sattlepunkt an der Stelle $(-3,2)$.

Für den Punkt $(-3,-2)$ haben wir

$$f_{xx}(-3,-2)f_{yy}(-3,-2) - f_{xy}^2(-3,-2) = -12 \cdot (-12) > 0.$$

Das heisst, dass f ein lokales Maximum im Punkt $(-3,-2)$ hat.

c) Der Lagrange-Multiplikator ist

$$F(x,y,z,\lambda) = x^2 + xy + yz + \lambda(x + y + z - 1).$$

Folgende Ableitungen müssen also gleich 0 sein.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + y + \lambda = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = x + z + \lambda = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial z} = y + \lambda = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x + y + z - 1 = 0.$$

Aus den ersten drei Gleichungen erhalten wir $x = 0, y = -\lambda, z = -\lambda$. Setzen wir das in die letzte Gleichung ein, erhalten wir $\lambda = -1/2$. Somit wird das Minimum bei $x = 0, y = z = 1/2$ erreicht.

6. (*10 Punkte*)

a)

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= (t, \sin t), && t \in [0, \pi] \\
\gamma_2(t) &= (-t, -t - \pi), && t \in [-\pi, 0] \\
\gamma_3(t) &= (0, t), && t \in [-\pi, 0]
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{\pi} (\sin t)\, dt + 2 \cdot (\cos t)\, dt = |-\cos t + 2 \sin t|_0^{\pi} = 2. \\
I_2 &= \int_{-\pi}^{0} (-t - \pi)(-dt) + 2(-dt) = \int_{-\pi}^{0} (t + \pi - 2) dt \\
&= \left| \frac{1}{2} t^2 + (\pi - 2) t \right|_{-\pi}^{0} = \frac{\pi^2}{2} - 2\pi. \\
I_3 &= \int_{-\pi}^{0} 2 dt = 2\pi. \\
I &= I_1 + I_2 + I_3 = \frac{\pi^2}{2} + 2.
\end{aligned}$$

c) Die Formel von Green ergibt

$$I = \int \int_A 1 \cdot dA$$

wobei A die Fläche innerhalb der Kurve γ beschreibt.

Die Fläche A kann aufgeteilt werden in den Teil über der x-Achse und in den Teil unter der x-Achse. Darum gilt

$$\begin{aligned}
I = \int \int_A dA &= \int_{x=0}^{\pi} \int_{y=0}^{\sin x} dy\, dx + \int_{x=0}^{\pi} \int_{y=x-\pi}^{0} dy\, dx \\
&= \int_{x=0}^{\pi} \sin x\, dx + \int_{x=0}^{\pi} (\pi - x)\, dx = |-\cos x + \pi x - x^2/2|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2} + 2.
\end{aligned}$$