Prof. Dr. E. W. Farkas **ETH Zürich, Februar 2016**

D–BIOL, D–CHAB

Prüfung zur Vorlesung Mathematik I/II

Bitte ausfüllen!

Name:	
Vorname:	
Legi-Nr.:	

Nicht ausfüllen!

Aufgabe	Punkte	Kontrolle
1		
2		
3		
4		
5		
6		
Total		

Vollständigkeit	

Hinweise zur Prüfung

Prüfungsdauer: 3 Stunden.

Hilfsmittel: Aufzeichnungen im Umfang von 20 Seiten A4.

Bitte beachten Sie folgende Punkte:

- Tragen Sie **jetzt** Ihren Namen in das Deckblatt ein und geben Sie es **am Ende** der Prüfung als vorderstes Blatt Ihrer Arbeit ab.
- Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch.
- Beginnen Sie jede Aufgabe **auf einem neuen Blatt**.
- Begründen Sie Ihre Lösungen. Dabei können bekannte Formeln aus der Vorlesung und den Übungen ohne Herleitung verwendet werden.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift, rotem oder grünem Kugelschreiber.
- Die Reihenfolge der Bearbeitung der Aufgaben ist Ihnen freigestellt.
- Wir erwarten nicht, dass Sie alle Aufgaben lösen. Tun Sie einfach Ihr Bestes! Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet.

Viel Erfolg!

Aufgaben

---

1. (*10 Punkte*)

Die Antworten in dieser Aufgabe müssen *nicht* begründet werden. Schreiben Sie die Antworten *vollständig gekürzt und vereinfacht* direkt auf das Aufgabenblatt.

a) Sei $a_n = \frac{n}{n+1} \cdot \cos(2n\pi)$ für $n = 1, 2, \ldots$ Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \underline{\qquad\qquad}.$$

b) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right)^x = \underline{\qquad\qquad}.$$

c) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to\infty} \big(\log(2x^3 + 2x^2 + 2) - \log(x^3 + x + 1)\big) = \underline{\qquad\qquad}.$$

d) Berechnen Sie das folgende bestimmte Integral

$$\int_0^2 |x^2 - 1|\, dx = \underline{\qquad\qquad\quad}.$$

e) Sei $p, q \in \mathbb{R}$ und

$$\frac{1}{(p-x)(q-x)} = \frac{A}{p-x} + \frac{B}{q-x}, \text{ für gewisse } A, B \in \mathbb{R} \text{ und alle } x \in \mathbb{R}$$

Bestimmen Sie $A = \underline{\qquad\qquad\quad}$, $B = \underline{\qquad\qquad\quad}$ in Abhängigkeit der Konstanten p, q.

f) Sei $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x) = \begin{cases} xe^{2x}, & \text{für } x < 1 \\ ax^2 + bx + c, & \text{für } x \geq 1 \end{cases},$$

für gewisse Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie a, b und c derart, dass g auf ganz $\mathbb{R}$ zweimal differenzierbar ist (und insbesondere somit stetig und differenzierbar).

Lösung: $a = \underline{\qquad}$, $b = \underline{\qquad}$, $c = \underline{\qquad}$.

2. (*10 Punkte*)

Die Antworten in dieser Aufgabe müssen *nicht* begründet werden. Schreiben Sie die Antworten *vollständig gekürzt und vereinfacht* direkt auf das Aufgabenblatt.

In der folgenden Aufgabe bezeichnet i die imaginäre Einheit, d.h. $i^2 = -1$.

a) Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen u und w in der Form $a+ib$, $a, b \in \mathbb{R}$:

(Bemerkung: im ersten Beispiel bezeichnet $\overline{z}$ die zu z konjugiert komplexe Zahl.)

$$\overline{3i\left(\frac{1}{3} + 2i\right)} = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$\frac{2+5i}{1-3i} = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$i^{47} = \_\_\_\_\_\_\_\_.$$

b) Skizzieren Sie folgende Menge M in der komplexen Zahlenebene:

$$M = \{z \in \mathbb{C} : |z + \overline{z}| \leq 4,\ |z - \overline{z}| \leq 2\}$$

c) Sei

$$z = 2^{-25} \cdot (1-i)^{50}$$

i) Bestimmen $r > 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ derart, dass $z = re^{i\varphi}$ gilt :

$$r = \_\_\_\_\_\_\_\_, \varphi = \_\_\_\_\_\_\_\_.$$

ii) Schreiben Sie z in der Form $a + ib$, für geeignete $a, b \in \mathbb{R}$:

$$a = \_\_\_\_\_\_\_\_, b = \_\_\_\_\_\_\_\_.$$

d) Sei

$$\omega = 5e^{\frac{\pi}{3}i}(2\sqrt{3} + di)$$

Für welche Werte von $d \in \mathbb{R}$ gilt $\mathrm{Re}(\omega) = 0$?

$$d = \_\_\_\_\_\_\_\_.$$

e) Bestimmen Sie die Lösung von

$$z^3 = 8$$

in Polarkoordinaten

$$z_1 = \_\_\_\_\_\_\_\_, z_2 = \_\_\_\_\_\_\_\_, z_3 = \_\_\_\_\_\_\_\_.$$

3. (*10 Punkte*)

a) Für welche Werte von λ ist folgende Matrix invertierbar?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & \lambda \end{pmatrix}.$$

b) Seien v_1, v_2, v_3, v_4 folgende Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 14 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

i) Drücken Sie v_4 als Linearkombination der Vektoren v_1, v_2, v_3 aus, das heisst finden Sie Koeffizienten $x, y, z \in \mathbb{R}$ so dass gilt

$$v_4 = x\, v_1 + y\, v_2 + z\, v_3.$$

ii) Sind die Vektoren v_1, v_2, v_3, v_4 linear unabhängig?

c) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

i) Finden Sie einen Eigenvektor von A zum Eigenwert 1.

ii) Sie wissen, dass 1 ein Eigenwert von A ist, finden Sie alle Eigenwerte von A.
Hinweis: Schreiben Sie das charakteristische Polynom $P(x)$ von A in der Form

$$P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$.

d) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Vektoren $(1, 1)$ und $(2, -3)$ sind Eigenvektoren von A zu den Eigenwerten 3 und -2. Was sind die Eigenwerte und Eigenvektoren von A^{-1} ?

4. (*10 Punkte*)

a) Wir betrachten folgende Differentialgleichung

$$y(x)' - \frac{3}{x} y(x) = x, \quad x > 0. \tag{1}$$

mit Anfangswert

$$y(1) = 2. \tag{2}$$

i) Schreiben Sie die zu (1) gehörige homogene Differentialgleichung auf und finden Sie deren allgemeine Lösung.

ii) Finden Sie die allgemeine Lösung von (1) mit Variation der Konstanten.

iii) Finden Sie die eindeutige Lösung von (1), die die Bedingung (2) erfüllt.

b) Wir betrachten folgende Differentialgleichung

$$y'' + 2y' + 5y = \sin(2x). \tag{3}$$

i) Schreiben Sie die zu (3) gehörige homogene Differentialgleichung auf und finden Sie deren allgemeine Lösung.

ii) Bestimmen Sie die Konstanten A und B so, dass

$$y(x) = A \sin(2x) + B \cos(2x)$$

eine partikuläre Lösung von (3) ist.

iii) Finden Sie die allgemeine Lösung von (3).

5. (*10 Punkte*)

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche

$$z = \sin(x)\cos(y)$$

einerseits im Punkt $(0, \pi, 0)$ und andererseits im Punkt $(\frac{\pi}{2}, \pi, -1)$.

b) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte, sowie alle lokalen Minima, lokalen Maxima und Sattelpunkte der Funktion f definiert durch

$$f(x, y) = x^3 + 3x^2 - 9x + y^3 - 12y.$$

c) Bestimmen Sie das Minimum der Funktion

$$f(x, y, z) = x^2 + xy + yz$$

unter der Nebenbedingung $x + y + z = 1$.

6. (*10 Punkte*)

Berechnen Sie das Linienintegral $I = \int_\gamma y dx + 2dy$ wobei γ die Verknüpfung von γ_1, γ_2 und γ_3 ist (das heisst γ ist die geschlossene Kurve, die sich ergibt, wenn man γ_1, γ_2 und γ_3 nacheinander durchläuft).

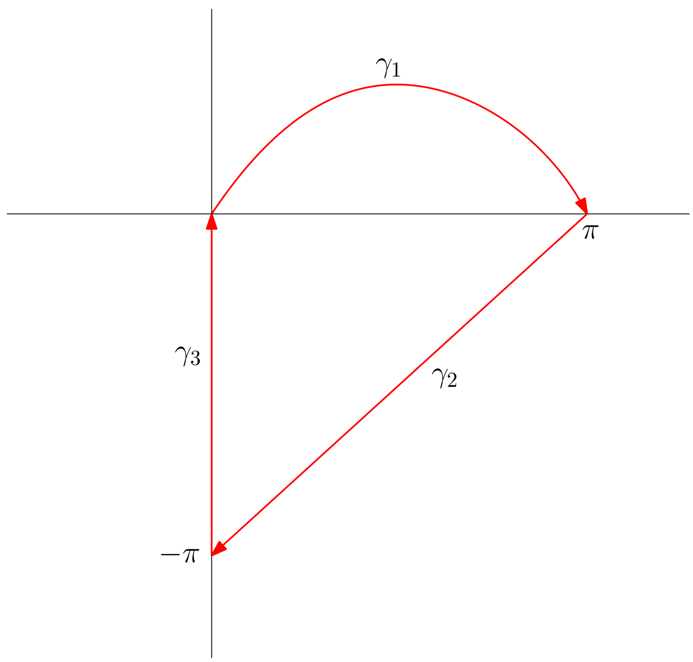

Abbildung 1: Die Kurve γ

Die Kurve γ_1 ist gegeben durch die Gleichung

$$y = \sin(x), \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Sie beginnt beim Punkt $(0, 0)$ und endet beim Punkt $(\pi, 0)$.

Die Kurve γ_2 ist gegeben durch die Gleichung

$$y = x - \pi.$$

Sie beginnt beim Punkt $(\pi, 0)$ und endet beim Punkt $(0, -\pi)$.

Die Kurve γ_3 geht vertikal vom Punkt $(0, -\pi)$ zum Punkt $(0, 0)$.

a) Parametrisieren Sie die Kurven γ_1, γ_2 und γ_3.

b) Berechnen Sie die folgenden Linienintegrale

$$I_1 = \int_{\gamma_1} ydx + 2dy$$
$$I_2 = \int_{\gamma_2} ydx + 2dy$$
$$I_3 = \int_{\gamma_3} ydx + 2dy$$
$$I = \int_{\gamma} ydx + 2dy$$

c) Berechnen Sie das Linienintegral I mit der Formel von Green.

Hinweis: Die Formel von Green besagt folgendes: Sei A ein abgeschlossenes Gebiet von $\mathbb{R}^2$ mit Rand γ. Dann gilt

$$\int_{\gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\int_{A} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dA$$

Die Formel von Green kann auch aus der Formel von Stokes hergeleitet werden.