Dr. A. Caspar **ETH Zürich, Februar 2017**

D-BIOL, D-CHAB, D-HEST

Prüfung zur Vorlesung Mathematik I/II

---

1. (*12 Punkte*)

a) (*1 Punkt*) Die Ableitung ist mit Kettenregel

$$f'(x) = 2x\ln(x) + x.$$

b) (*1 Punkt*) Die Ableitung f' von f ist $f'(x) = 2x\ln(x) + x$, siehe Aufgabe **1a)**. Es gilt also $f'(x) = 0$ genau dann, wenn $2\ln(x)+1 = 0$, da $x > 0$. Die einzige kritische Stelle ist also bei $x_0 = e^{-\frac{1}{2}}$. Tatsächlich ist das auch ein Minimum, da $f'(x) < 0$ für $x < e^{-\frac{1}{2}}$ und $f'(x) > 0$ für $x > e^{-\frac{1}{2}}$. Das gesuchte a ist also

$$a = -\frac{1}{2}.$$

c) (*1 Punkt*) Die zweite Ableitung von f ist wieder mit Kettenregel $f''(x) = 2\ln(x)+3$. Somit gilt $f''(x) > 0$ (also nach links gekrümmt) genau dann, wenn $x > e^{-\frac{3}{2}}$, und $f''(x) < 0$ (also nach rechts gekrümmt) genau dann, wenn $x < e^{-\frac{3}{2}}$. Daraus folgt

$$c = -\frac{3}{2}.$$

d) (*1 Punkt*) Da f für $x \neq 1$ nach Definition stetig ist, bleibt als Bedingung, dass f auch in $x = 1$ stetig sein muss. Das heisst, es muss gelten $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$. Mit der Regel von l'Hôpital folgt

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{b}{2x^2} = \frac{b}{2} \overset{!}{=} 2 = f(1).$$

Daraus folgt

$$b = 4.$$

e) (*1 Punkt*) Mit partieller Integration und dem Hinweis folgt

$$\begin{aligned}\int x^2\cos(x)\,dx &= x^2\sin(x) - 2\int x\cos(x)\,dx \\ &= (x^2-2)\sin(x) + 2x\cos(x) + C.\end{aligned}$$

f) (*2 Punkte*) Die Entwicklung ist gegeben durch $a_{n+1} = f(a_n)$ mit Reproduktionsfunktion $f(x) = \dfrac{bx+c}{x}$. Damit $a^* = 1$ und $a^{**} = 2$ Fixpunkte der Entwicklung sind, muss $f(1) = 1$ und $f(2) = 2$ gelten. Daraus folgen die Bedingungen $b + c = 1$ und $b + \frac{c}{2} = 2$ und somit

$$b = 3 \qquad \text{und} \qquad c = -2.$$

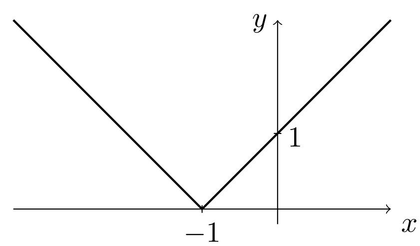
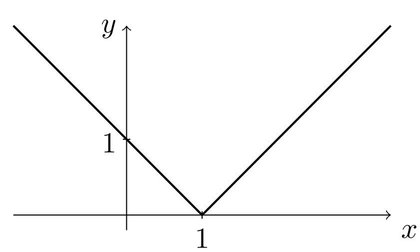
g) (*2 Punkte*) Der Startwert $x_0 = \frac{1}{10}$ ist in der Nähe von Null. Der Punkt $a = 0$ ist für jede der angegebenen Reproduktionsfunktionen ein Fixpunkt, denn $f(0) = 0$ für alle vier Optionen. Weiter ist ein Fixpunkt a einer Entwicklung mit Reproduktionsfunktion f attraktiv falls $|f'(a)| < 1$ und abstossend falls $|f'(a)| > 1$. In unserem Fall sind die Ableitungen in der gleichen Reihenfolge wie in der Aufgabe

$$\begin{aligned}f(x) &= 1 + \cos(x)\\ f(x) &= 1 - \cos(x)\\ f(x) &= \cos(x) - 1\\ f(x) &= 1 + \cos(x) - x\sin(x)\end{aligned}$$

Es gilt also $|f'(0)| < 1$ für die zweite und dritte Option und $|f'(0)| > 1$ für die erste und vierte Option. Die richtigen Antworten sind also

richtig	**falsch**	
$\bigcirc$	$\otimes$	Für die Reproduktionsfunktion f mit $f(x) = x + \sin(x)$ stirbt die Population aus.
$\otimes$	$\bigcirc$	Für die Reproduktionsfunktion f mit $f(x) = x - \sin(x)$ stirbt die Population aus.
$\otimes$	$\bigcirc$	Für die Reproduktionsfunktion f mit $f(x) = \sin(x) - x$ stirbt die Population aus.
$\bigcirc$	$\otimes$	Für die Reproduktionsfunktion f mit $f(x) = x + x\cos(x)$ stirbt die Population aus.

h) (*2 Punkte*) Die Funktion $f(x) = |1 + x|$ hat in 1 den Wert $f(-1) = 0$, was einen der beiden Graphen direkt ausschliesst. Der andere ist korrekt. Weiter ist f in 0 und 1 differenzierbar mit Ableitung 1.

richtig	**falsch**	
$\otimes$	$\bigcirc$	Der Graph von f ist 
$\bigcirc$	$\otimes$	Der Graph von f ist 
$\bigcirc$	$\otimes$	Die Funktion f ist in -1 differenzierbar.
$\otimes$	$\bigcirc$	Die Funktion f ist in 0 differenzierbar.

i) (*1 Punkt*) Es gilt

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2,$$

wie man direkt aus dem Graphen von f ablesen kann (siehe Aufgabe **1h)**) oder auch durch Ausrechnen des Integrals.

2. (*14 Punkte*)

a) (*2 Punkte*) Es gilt in kartesischer Darstellung $e^{i\pi} = -1$. Durch Erweitern der Brüche erhält man

$$z = \frac{(1+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} - (1+i)^2 = \frac{5+5i}{5} - 2i = 1-i$$

Weiter ist davon die Polardarstellung $1-i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$. Die richtigen Antworten sind also

richtig	**falsch**	
○	⊗	$z = e^{-i\pi/2}$
○	⊗	$z = -i$
⊗	○	$z = 1-i$
⊗	○	$z = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$

b) (*1 Punkt*) Die Gleichung $z^3 = 8i$ besitzt drei Lösungen. Diese kann man durch aufeinanderfolgende Drehungen um den gleichen Winkel erhalten (entspricht Addition oder Subtraktion des Winkels in der Polardarstellung). Die Differenz der Winkel der angegebenen Lösungen ist $\frac{\pi}{6} - (-\frac{\pi}{2}) = \frac{2\pi}{3}$. Die dritte Lösung der Gleichung ist somit

$$z_3 = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3})} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}.$$

Die gesuchte Antwort ist die kartesische Darstellung von z_3. Wegen $e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ ist also

$$z_3 = -\sqrt{3} + i.$$

c) (*2 Punkte*) Das charakteristische Polynom von A ist

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ -1 & -\lambda & 2 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} &= \lambda^2(1-\lambda) + 4 - 2 + 2\lambda - 2(1-\lambda) - 2\lambda \\ &= -\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda \\ &= \lambda(-\lambda^2 + \lambda + 2). \end{aligned}$$

Die Nullstellen davon sind $\lambda = 0$ sowie $\lambda = 2$ und $\lambda = -1$. Also ist

$$\lambda_2 = 0 \qquad \lambda_3 = -1.$$

d) (*1 Punkt*) Die drei Vektoren sind linear abhängig genau dann, wenn die 3x3 Matrix, deren Spalten die gegebenen Vektoren sind, Determinante gleich Null hat. Wir rechnen

$$\det \begin{pmatrix} 2 & -1 & c \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = 2 - 3c + 12 + 1 = 15 - 3c.$$

Die Determinante verschwindet (und folglich sind die Vektoren linear abhängig) falls

$$c = 5.$$

e) (*3 Punkte*) Man rechnet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 6 & 3 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{III+II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{II+2I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{III-2II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right).$$

Daraus folgt

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

f) (*1+2 Punkte*)

i) Für den Eigenvektor muss gelten

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+8 \\ -2b-6 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 5 \begin{pmatrix} b \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$b = 2.$$

ii) Wegen $v_{100} = Cv_{99}$ gilt

$$v_{99} = C^{-1} v_{100}.$$

Aus Teilaufgabe i) folgt, dass $v_{100} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von C zum Eigenwert $\lambda = 5$ ist (als Vielfaches des Eigenvektors $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$). Somit ist v_{100} auch ein Eigenvektor von C^{-1} und zwar zum Eigenwert $\frac{1}{\lambda}$. Es folgt

$$v_{99} = C^{-1} v_{100} = \frac{1}{5} v_{100} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Altenativ: Die Matrix C^{-1} lässt sich auch ausrechnen, z.B. mit der Formel

$$C^{-1} = \frac{1}{\det(C)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt genauso

$$v_{99} = C^{-1} v_{100} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Altenativ: Man kann auch einfach das Gleichungssystem $v_{100} = Cv_{99}$ für v_{99} lösen, also

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Dieses ergibt die Gleichungen $-1 = x - 4y$ und $1 = -2x + 3y$ mit Lösung $x = -1/5$ und $y = 1/5$. Man findet wiederum

$$v_{99} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

g) (*2 Punkte*) Rechnet man Bv_0 aus, sieht man sofort, dass die Vektoren in den Antwortmöglichkeiten 1,2 und 3 alles Eigenvektoren von B sind und zwar zu den Eigenwerten 2, $\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$. Für Eigenvektoren v_0 mit Eigenwert λ gilt

$$v_n = Bv_{n-1} = \ldots = B^n v_0 = \lambda^n v_0.$$

Daraus folgt direkt, dass Antwort 2 und 3 richtig sein müssen (λ^n konvergiert in diesem Fall gegen Null) und Antwort 1 falsch (λ^n explodiert), denn $|\pm \frac{1}{2}| < 1$ aber $|2| > 1$.

Antwort 4 kann man auch ausschliessen, denn hier ist v_0 die Summe der Vektoren aus Antwort 1 und 2, also die Summe der Eigenvektoren zum Eigenwert 2 und $\frac{1}{2}$. Es gilt somit in diesem Fall

$$v_n = B^n v_0 = B^n \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + B^n \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

und die Population stirbt nicht aus.

Die richtigen Antworten sind also

richtig	**falsch**	
○	⊗	Für den Startvektor $v_0 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ stirbt die Population aus.
⊗	○	Für den Startvektor $v_0 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ stirbt die Population aus.
⊗	○	Für den Startvektor $v_0 = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ stirbt die Population aus.
○	⊗	Für den Startvektor $v_0 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ stirbt die Population aus.

3. (*10 Punkte*)

a) (*1 Punkt*) Das Richtungsfeld zeigt, dass jeder Anfangswert $1 < y(0) < 3$ ausser $y(0) = 2$ die gewünschte Eigenschaft liefert.

b) (*2 Punkte*) Die zu den im Hinweis angegebenen Eigenvektoren zugehörige Eigenwerte sind 8 und 0. Daraus folgt direkt, dass die erste Antwortmöglichkeit falsch ist. Die allgemeine Lösung ist

$$y(t) = C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{8t} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt, dass die Lösung zum Anfangswert $y_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ die Form $y_2(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ für alle Zeiten t hat. Somit ist Antwort 2 richtig. Antwort 3 ist falsch, da die angegebene Funktion nicht den angegebenen Anfangswert besitzt. Antwort 4 ist richtig, folgt z.B. aus der Formel für die allgemeine Lösung, denn $y_2(t) = C_1 e^{8t}$ und somit $y_2'(t) = 8C_1 e^{8t}$, $y_2''(t) = 64C_1 e^{8t}$. Alternativ kann man die Formel aus der Vorlesung brauchen. Die richtigen Antworten sind also

richtig	falsch	
○	⊗	Die allgemeine Lösung dieses Differentialgleichungssystems ist $$y(t) = C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{8t} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{t}$$ mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
⊗	○	Die Lösung $y(t)$ des DGL-Systems zum Anfangswert $y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ stabilisiert sich für $t \to \infty$ in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
○	⊗	Die Lösung des DGL-Systems zum Anfangswert $y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch $y(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{8t} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{t}$.
⊗	○	Die zweite Komponente y_2 einer Lösung y des DGL-Systems erfüllt die Differentialgleichung 2. Ordnung $$y_2''(x) - 8y_2'(x) = 0.$$

c) (*3 Punkte*) Dieses Differentialgleichung kann mit der Methode der Variation der Konstanten gelöst werden.

Die homogene Gleichung ist $y'(x) = \frac{1}{2x}y(x)$ mit Lösung

$$y(x) = Ke^{\frac{1}{2}\ln(x)} = K\sqrt{x},$$

denn $\int \frac{1}{2x}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x) + C$. Der Ansatz für die inhomogene Gleichung ist also $y(x) = K(x)\sqrt{x}$. Einsetzen des Ansatzes in die Differentialgleichung liefert

$$K'(x) \stackrel{!}{=} \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Daraus folgt

$$K(x) = \int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{x} + C$$

und somit ist die allgemeine Lösung

$$y(x) = K(x)\sqrt{x} = x + C\sqrt{x} \qquad \text{mit } C \in \mathbb{R} \text{ Konstante.}$$

Gesucht ist die Lösung mit $y(4) = 3$, daraus folgt $C = -\frac{1}{2}$. Die gesuchte Antwort ist also

$$y(x) = x - \frac{1}{2}\sqrt{x}.$$

d) (*4 Punkte*) Dieses Differentialgleichung kann mit der Methode der Trennung der Variablen gelöst werden.

Schreibt man $y'(x) = \frac{dy}{dx}$ und sortiert die y-Terme auf die linke Seite und die x-Terme auf die rechte Seite, erhält man aus der DGL die Gleichung

$$e^{-y}\,dy = -3x^2\,dx.$$

Auf beiden Seiten bildet man nun die Stammfunktion und rechnet aus

$$\int e^{-y}\,dy = \int -3x^2\,dx = -x^3 + C \qquad \text{mit } C \in R \text{ Konstante.}$$

Eine Stammfunktion der linken Seite ist $-e^{-y}$.

Die somit erhaltene Gleichung

$$-e^{-y} = -x^3 + C$$

löst man nach y auf und erhält

$$y = y(x) = -\ln(x^3 + \widetilde{C}) \qquad \text{mit } \widetilde{C} \text{ Konstante.}$$

Zuletzt wird die Anfangsbedingung $y(0) = 0$ eigesetzt, welche $\widetilde{C} = 1$ liefert. Die gesuchte Lösung ist also

$$y(x) = -\ln(x^3 + 1).$$

4. (*10 Punkte*)

a) (*2 Punkte*) Ausrechnen der partiellen Ableitungen zeigt, dass Antwort 2 korrekt ist. Die Gleichung für die Tangentialebene in einem Punkt (x_0, y_0, z_0) ist

$$l(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

Setzt man den angegebenen Punkt von Antwort 3 ein (die partiellen Ableitungen hat man bsp. aus Antwort 2) folgt, dass Antwort 3 falsch ist. Die richtige Gleichung ist $l(x,y) = -2x$.

Antwort 1 ist falsch. Der Punkt $(-1,1)$ liegt auf der Niveaulinie zur Höhe 1 da $f(-1,1) = 1$. Der Punkt in Antwort 4 ist in der Tat ein Sattelpunkt, da in diesem Punkt der Gradient verschwindet und zusätzlich in diesem Punkt $f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y)^2 = -24x < 0$ gilt. Die richtigen Antworten sind also

richtig	**falsch**	
○	⊗	Der Punkt $(-1,1)$ liegt auf der Niveaulinie von f zur Höhe -3.
⊗	○	Der Gradient von f ist $$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x^2 - 8 \\ -2y - 4 \end{pmatrix}.$$
○	⊗	Die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen der Funktion f im Punkt $(1,-2,-2)$ ist gegeben durch $l(x,y) = z = 8 - 2x$.
⊗	○	Die Funktion f hat bei $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -2\right)$ einen Sattelpunkt.

b) (*2 Punkte*) Es gilt $f_x(x,y) = 6x^2 - 8$ und $f_y(x,y) = -2y - 4$. Mit impliziter Differentiation folgt für die Steigung in $(-2,-4)$

$$y'(-2) = -\frac{f_x(-2,-4)}{f_y(-2,-4)} = -\frac{16}{4} = -4.$$

c) (*3 Punkte*) Das Gebiet C ist $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x \le 2\,,\ x^2 \le y \le 2x\}$ und somit das gesuchte Integral

$$\begin{aligned}
\iint_C f\, dA &= \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (1-y)\, dy dx \\
&= \int_0^2 \left(y - \frac{1}{2}y^2\right)\Big|_{y=x^2}^{y=2x} dx = \int_0^2 \left(2x - 3x^2 + \frac{1}{2}x^4\right) dx \\
&= x^2 - x^3 + \frac{1}{10}x^5\Big|_0^2 = -\frac{4}{5}.
\end{aligned}$$

d) (*3 Punkte*) Da die beiden Funktionen sich auf dem Abschnitt $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ kreuzen, müssen wir das Integral aufteilen.

Der Flächeninhalt von B ist die Summe des Flächeninhalts von B_1 und B_2.

Der Flächeninhalt von B_1 ist die Fläche zwischen $\sin(x)$ und $\cos(x)$ im Abschnitt $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{4}$, also

$$\begin{aligned}
\text{Fläche von } B_1 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos(x) - \sin(x))\, dx = \sin(x) + \cos(x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 - 0 = \sqrt{2} + 1.
\end{aligned}$$

Der Flächeninhalt von B_2 ist die Fläche zwischen $\cos(x)$ und $\sin(x)$ im Abschnitt $\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2}$, also

$$\begin{aligned}
\text{Fläche von } B_2 &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x) - \cos(x))\, dx = -\cos(x) - \sin(x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 0 - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1.
\end{aligned}$$

Der Flächeninhalt von B ist somit

$$|B| = |B_1| + |B_2| = 2\sqrt{2}.$$

5. (*14 Punkte*)

a) (*2 Punkte*) Sei $P(x,y) = 7x+3y$ die erste Komponente von K und $Q(x,y) = cx+dy$ die zweite Komponente. Damit K konservativ ist, reicht es, dass $Q_x = P_y$ gilt, und $\operatorname{div}(K) = 2$ bedeutet, dass $P_x + Q_y = 2$ sein muss. Man erhält die Bedingungen $c = 3$ und $7 + d = 2$, also

$$c = 3 \qquad \text{und} \qquad d = -5.$$

b) (*2 Punkte*) Der Flächeninhalt des Gebietes C ist $|C| = \frac{\pi}{2} + 1$ (nämlich Fläche eines Halbkreises mit Radius 1 plus die zwei Zacken mit Fläche je $\frac{1}{2}$).

Antwort 4 ist also richtig. Antwort 3 ist falsch, da das angegebene Gebietsintegral nichts anderes als die Fläche von C ist.

Die ersten beiden Antworten können ohne Ausrechnen der Integrale entschieden werden. Das Arbeitsintegral von K entlang γ ist mit der Formel von Green

$$\oint_\gamma K \cdot d\gamma = \iint_C (Q_x - P_y)\, dA = 2 \iint_C dA = 2 \cdot \text{Fläche von } C = \pi + 2.$$

Antwort 1 ist folglich korrekt.

Antwort 3 ist falsch, denn mit dem Satz von Gauss ist der Fluss von K durch γ gleich

$$\oint_\gamma K \cdot n\, ds = \iint_C \operatorname{div}(K)\, dA = -2 \iint_C dA = -2 \cdot \text{Fläche von } C = -\pi - 2 \neq 0.$$

Die richtigen Antworten sind also

richtig	**falsch**	
⊗	○	Das Arbeitsintegral vom K entlang γ ist $$\oint_\gamma K \cdot d\gamma = \pi + 2.$$
○	⊗	Der Fluss von K durch γ von innen nach aussen ist $$\oint_\gamma K \cdot n\, ds = 0.$$
○	⊗	Das Gebietsintegral der konstanten Funktion 1 über C ist $$\iint_B 1\, dA = \pi + \frac{1}{2}.$$
⊗	○	Der Flächeninhalt von C ist $\dfrac{\pi + 2}{2}$.

c) (*4 Punkte*) Das Vektorfeld K ist konservativ, da $Q_x = 1 = P_y$. Somit ist das Arbeitsintegral entlang einer Kurve nur von deren Anfangs- und Endpunkt abhängig, aber nicht vom Weg dazwischen. Man kann somit auch anstatt der Kurve γ beispielsweise die geradlinige Verbindung $\widetilde{\gamma}$ von $(0,0)$ bis $(2,4)$ nehmen. Eine mögliche Parametrisierung von $\widetilde{\gamma}$ ist

$$\widetilde{\gamma} : t \mapsto \widetilde{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix} \qquad \text{für} \qquad 0 \leq t \leq 2.$$

Man erhält somit

$$\begin{aligned} \int_\gamma K \cdot d\gamma &= \int_{\widetilde{\gamma}} K \cdot d\gamma \\ &= \int_0^2 K(\widetilde{\gamma}(t)) \cdot \widetilde{\gamma}'(t)\, dt = \int_0^2 \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} dt = \int_0^2 4t\, dt = 2t^2 \Big|_0^2 = 8. \end{aligned}$$

Alternativ: Das Vektorfeld K ist konservativ, da $Q_x = 1 = P_y$. Es kann also als Gradientenfeld einer Funktion f geschrieben werden. Als Funktion f kann die Funktion $f(x,y) = xy$ gewählt werden. Dann ist

$$K(x,y) = \nabla f(x,y).$$

Für das Kurvenintegral eines konservativen Vektorfeldes $K = \nabla f$ entlang einer Kurve γ gilt

$$\int_\gamma K \cdot d\gamma = f(\text{Endpunkt von } \gamma) - f(\text{Anfangspunkt von } \gamma).$$

In diesem Fall also, mit $f(x,y) = xy$, ist

$$\int_\gamma K \cdot d\gamma = f(4,2) - f(0,0) = 8.$$

d) (*3 Punkte*) Die Parametrisierungen sind

$$\begin{aligned} \gamma_1 : t \mapsto \gamma_1(t) &= \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{für} \qquad 0 \leq t \leq 4 \\ \gamma_2 : t \mapsto \gamma_2(t) &= \begin{pmatrix} 4 \\ 2t \end{pmatrix} \qquad \text{für} \qquad 0 \leq t \leq 1 \\ \gamma_3 : t \mapsto \gamma_3(t) &= \begin{pmatrix} 4-t \\ \sqrt{4-t} \end{pmatrix} \qquad \text{für} \qquad 0 \leq t \leq 4. \end{aligned}$$

e) (*3 Punkte*) Nach dem Satz von Gauss ist

$$\oint_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} K \cdot n\, ds = \iint_B \operatorname{div}(K)\, dA.$$

In diesem Fall ist $\operatorname{div}(K) = 1 + 2y - 2y = 1$ und somit

$$\begin{aligned}\oint_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} K \cdot n\, ds &= \iint_B dA = \text{Fläche von } B \\ &= \int_0^4 \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 = \frac{2}{3}\sqrt{4^3} = \frac{2}{3}\sqrt{64} = \frac{16}{3}.\end{aligned}$$

Alternativ: Der Fluss kann auch direkt ausgerechnet werden. Dabei braucht man beispielsweise die Parametrisierungen von Aufgabe **5e)** und rechnet

$$\oint_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} K \cdot n\, ds = \int_{\gamma_1} K \cdot n\, ds + \int_{\gamma_2} K \cdot n\, ds + \int_{\gamma_3} K \cdot n\, ds$$

mit

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} K \cdot n\, ds &= \int_0^4 K(\gamma_1(t)) \cdot n(\gamma_1(t))\, dt \\ &= \int_0^4 \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} dt = \int_0^4 -t\, dt = -\frac{1}{2} t^2 \Big|_0^4 = -8 \\ \int_{\gamma_2} K \cdot n\, ds &= \int_0^1 K(\gamma_2(t)) \cdot n(\gamma_2(t))\, dt \\ &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 4 + 16t \\ -4t^2 + 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 8 + 32t\, dt = 8t + 16t^2 \Big|_0^1 = 24 \\ \int_{\gamma_3} K \cdot n\, ds &= \int_0^4 K(\gamma_3(t)) \cdot n(\gamma_3(t))\, dt \\ &= \int_0^4 \begin{pmatrix} 4 - t + 2(4-t)^{\frac{3}{2}} \\ -(4-t) + 4 - t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{4-t}} \\ 1 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^4 -\frac{(4-t)}{2\sqrt{4-t}} - \frac{2(4-t)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{4-t}}\, dt = -\frac{1}{2}\int_0^4 \sqrt{4-t}\, dt - \int_0^4 4 - t\, dt \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{-2}{3}(4-t)^{\frac{3}{2}} - \left(4t - \frac{1}{2}t^2\right) \Big|_0^4 = -(16-8) - \frac{1}{3}\sqrt{4^3} = -8 - \frac{8}{3}\end{aligned}$$

Insgesamt also genauso

$$\oint_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} K \cdot n\, ds = -8 + 24 - 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}.$$