Dr. A. Caspar **ETH Zürich, Februar 2017**

D-BIOL, D-CHAB, D-HEST

Prüfung zur Vorlesung Mathematik I/II

Bitte ausfüllen!

Name:	
Vorname:	
Legi-Nr.:	

Nicht ausfüllen!

Aufgabe	Punkte		Kontrolle	
	MC	Total	MC	Total
1				
2				
3				
4				
5				
Total				

Vollständigkeit	

Bitte wenden!

Wichtige Hinweise zur Prüfung

Prüfungsdauer: 3 Stunden.

Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten (nicht Blätter!) mit persönlichen, von Hand geschriebenen Notizen. Keine (Taschen)Rechner. 1 Wörterbuch für fremdsprachige Studierende.

Bitte beachten Sie folgende Punkte:

- Tragen Sie **jetzt** Ihren Namen in das Deckblatt ein und geben Sie es **am Ende** der Prüfung als vorderstes Blatt Ihrer Arbeit ab.

- Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch.

- Beginnen Sie jede Aufgabe **auf einem neuen Blatt**.

- Begründen Sie Ihre Lösungen, soweit nicht anders angegeben. Dabei können Sie bekannte Formeln aus der Vorlesung und den Übungen ohne Herleitung verwenden.

- Schreiben Sie **nicht** mit Bleistift und **nicht** mit roter oder grüner Farbe.

- Die Reihenfolge der Bearbeitung der Aufgaben ist Ihnen freigestellt. Ordnen Sie jedoch am Ende der Prüfung die Aufgaben für die Abgabe.

- Wir erwarten nicht, dass Sie alle Aufgaben lösen. Versuchen Sie einfach Ihr Bestes!
  Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet.

- Bei einer **Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe)** sind jeweils 4 Aussagen/Antworten angegeben, davon sind jeweils genau 2 korrekt.

  Eine MC-Aufgabe ist genau dann korrekt gelöst, wenn Sie die 2 korrekten Antworten mit „richtig“ **und** die 2 inkorrekten mit „falsch“ kennzeichnen. Sie müssen also bei jeder MC-Aufgabe genau 4 Kreuze setzen und jedes muss jeweils an der richtigen Stelle sein.

  Zum Beispiel ist folgende MC-Aufgabe nur mit diesen 4 Kreuzen korrekt gelöst.

richtig	**falsch**	
⊗	○	Hier steht eine korrekte Aussage/Antwort.
⊗	○	Hier steht eine korrekte Aussage/Antwort.
○	⊗	Hier steht eine inkorrekte Aussage/Antwort.
○	⊗	Hier steht eine inkorrekte Aussage/Antwort.

  Bei den MC-Aufgaben werden nur die Antworten auf den **Aufgabenblättern** bewertet. Die Antworten in den MC-Aufgaben müssen nicht begründet werden.

Viel Erfolg!

Aufgaben

1. (*12 Punkte*)

Die Antworten in dieser Aufgabe müssen Sie **nicht** begründen. Schreiben Sie die Antworten **vollständig gekürzt und vereinfacht** direkt auf das Aufgabenblatt. Antworten auf anderen Blättern werden nicht bewertet.

Es sei $\mathbb{R}^{>0}$ die Menge aller positiven reellen Zahlen und $e = 2.718...$ die Eulersche Zahl.

a) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f : \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 \ln(x)$.

$$f'(x) = \underline{\hspace{6cm}}$$

b) Sei $a \in \mathbb{R}$. Die Funktion $f : \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 \ln(x)$ aus Aufgabe **1a)** besitzt bei $x_0 = e^a$ ein Minimum. Bestimmen Sie den Exponenten a.

$$a = \underline{\hspace{2cm}}$$

c) Sei $c \in \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion $f : \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 \ln(x)$ aus Aufgabe **1a)** ist für $0 < x < e^c$ nach rechts gekrümmt und für $x > e^c$ nach links gekrümmt. Bestimmen Sie den Exponenten c.

$$c = \underline{\hspace{2cm}}$$

d) Sei $b \in \mathbb{R}$ und sei $f : \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{b \ln(x)}{x^2 - 1} & \text{für } x \neq 1 \\ 2 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

Wie muss b gewählt werden, damit f eine stetige Funktion auf dem ganzen Definitionsbereich $\mathbb{R}^{>0}$ ist?

$$b = \underline{\hspace{2cm}}$$

e) Berechnen Sie eine Stammfunktion der Funktion f mit $f(x) = x^2 \cos(x)$.

$$\int f(x)\, dx = \underline{\hspace{6cm}}$$

Hinweis: Es gilt $\displaystyle\int x \sin(x)\, dx = \sin(x) - x\cos(x) + C.$

Bitte wenden!

f) Seien $b, c \in \mathbb{R}$ fest. Sei die Entwicklung $(a_n)_n$ mit $a_0 \neq 0$ gegeben durch

$$a_{n+1} = \frac{ba_n + c}{a_n}.$$

Wie müssen b und c gewählt werden, damit die Entwicklung die zwei Fixpunkte $a^* = 1$ und $a^{**} = 2$ besitzt?

$b =$ ______________ und $c =$ ______________.

g) **MC-Aufgabe** Kreuzen Sie Ihre Antworten direkt **auf dem Aufgabenblatt** an.

Die Entwicklung einer Population sei gegeben durch $x_{n+1} = f(x_n)$ mit Reproduktionsfunktion f. Der Startwert sei $x_0 = \frac{1}{10}$.

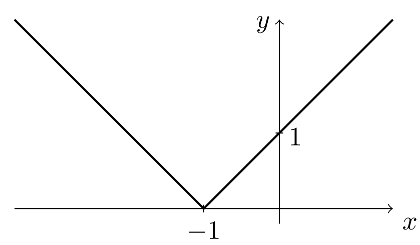
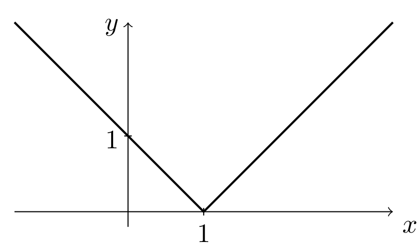
Welche der folgenden Aussagen sind **richtig** und welche **falsch**?

richtig	**falsch**	
○	○	Für die Reproduktionsfunktion f mit $f(x) = x + \sin(x)$ stirbt die Population aus.
○	○	Für die Reproduktionsfunktion f mit $f(x) = x - \sin(x)$ stirbt die Population aus.
○	○	Für die Reproduktionsfunktion f mit $f(x) = \sin(x) - x$ stirbt die Population aus.
○	○	Für die Reproduktionsfunktion f mit $f(x) = x + x\cos(x)$ stirbt die Population aus.

h) **MC-Aufgabe** Kreuzen Sie Ihre Antworten direkt **auf dem Aufgabenblatt** an.

Wir betrachten die Funktion f mit $f(x) = |1 + x|$.

Welche der folgenden Aussagen sind **richtig** und welche **falsch**?

<table>
<tr><th>richtig</th><th>falsch</th><th></th></tr>
<tr><td>○</td><td>○</td><td>Der Graph von f ist

</td></tr>
<tr><td>○</td><td>○</td><td>Der Graph von f ist

</td></tr>
<tr><td>○</td><td>○</td><td>Die Funktion f ist in -1 differenzierbar.</td></tr>
<tr><td>○</td><td>○</td><td>Die Funktion f ist in 0 differenzierbar.</td></tr>
</table>

i) Sei f wie in der obigen Aufgabe **1h)** die Funktion mit $f(x) = |1 + x|$.

Berechnen Sie

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \underline{\hspace{4cm}}.$$

Bitte wenden!

2. (*14 Punkte*)

In den Aufgabe **2a)** und **2b)** bezeichnet i die imaginäre Einheit. Es gilt also $i^2 = -1$.

a) **MC-Aufgabe** Kreuzen Sie Ihre Antworten direkt **auf dem Aufgabenblatt** an.

Sei

$$z = \frac{1+3i}{2+i} + (1+i)^2 e^{i\pi}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind **richtig** und welche **falsch**?

richtig	**falsch**	
◯	◯	$z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$
◯	◯	$z = 1 + i$
◯	◯	$z = 1 - i$
◯	◯	$z = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Bei den Aufgaben **2b), 2c) und 2d)** müssen Sie Ihre Antworten **nicht** begründen.
Schreiben Sie die Antworten **vollständig gekürzt und vereinfacht** direkt auf das Aufgabenblatt. Antworten auf anderen Blättern werden nicht bewertet.

b) Die Gleichung $z^3 = 8i$ besitzt die Lösungen

$$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \qquad \text{und} \qquad z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

Geben Sie die dritte Lösung **in kartesischer Darstellung** an. Schreiben Sie Ihre Antwort **direkt auf das Aufgabenblatt.**

$$z_3 = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

c) Die Matrix A sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ein Eigenwert von A ist $\lambda_1 = 2$. Geben Sie die beiden anderen Eigenwerte von A **direkt auf dem Aufgabenblatt** an.

$$\lambda_2 = \underline{\qquad\qquad\qquad} \qquad\qquad \lambda_3 = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

d) Sei $c \in \mathbb{R}$. Gegeben sind die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} c \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Wie muss c gewählt werden, damit die drei Vektoren linear abhängig sind?
Schreiben Sie Ihre Antwort **direkt auf das Aufgabenblatt.**

$$c = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

e) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

mit dem Gauss-Verfahren und geben Sie die Lösung an.

f) Die Matrix C sei

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

i) Die Matrix C hat den Eigenwert $\lambda = 5$ mit dazugehörigem Eigenvektor $\begin{pmatrix} b \\ -2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie b.

ii) Gegeben sei das Entwicklungsmodell $v_{n+1} = Cv_n$ in Matrixschreibweise.
Es gelte $v_{100} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie v_{99}.

g) MC-Aufgabe Kreuzen Sie Ihre Antworten direkt **auf dem Aufgabenblatt** an.

Das Entwicklungsmodell einer Population sei in Matrixschreibweise $v_{n+1} = Bv_n$ mit

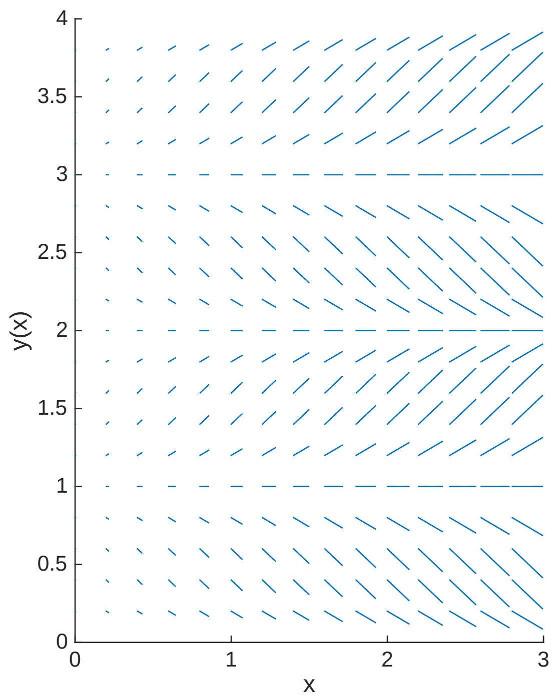
$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind **richtig** und welche **falsch**?

richtig	**falsch**	
○	○	Für den Startvektor $v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ stirbt die Population aus.
○	○	Für den Startvektor $v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ stirbt die Population aus.
○	○	Für den Startvektor $v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ stirbt die Population aus.
○	○	Für den Startvektor $v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ stirbt die Population aus.

3. (*10 Punkte*)

a) Das Richtungsfeld einer Differentialgleichung $y'(x) = F(x, y(x))$ sei:



Geben Sie einen möglichen Anfangswert $y(0) \neq 2$ an, sodass die Lösung $x \mapsto y(x)$ der Differentialgleichung zu diesem Anfangswert $y(0)$ für $x \to \infty$ gegen die stationäre Lösung $y_\infty = 2$ konvergiert.

Geben Sie Ihre Antwort **direkt auf dem Aufgabenblatt** an.

$$y(0) = \underline{\hspace{4cm}}$$

Sie müssen Ihre Antwort **nicht** begründen. Schreiben Sie diese **vollständig gekürzt und vereinfacht** direkt auf das Aufgabenblatt. Antworten auf anderen Blättern werden nicht bewertet.

b) **MC-Aufgabe** Kreuzen Sie Ihre Antworten direkt **auf dem Aufgabenblatt** an.

Wir betrachten das lineare Differentialgleichungssystem (DGL-System)

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} y(t)$$

mit $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ und $y'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix}$.

Hinweis: Die Vektoren $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sind Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Welche der folgenden Aussagen sind **richtig** und welche **falsch**?

richtig	**falsch**	
○	○	Die allgemeine Lösung dieses Differentialgleichungssystems ist $$y(t) = C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{8t} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{t}$$ mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
○	○	Die Lösung $y(t)$ des DGL-Systems zum Anfangswert $y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ stabilisiert sich für $t \to \infty$ in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
○	○	Die Lösung des DGL-Systems zum Anfangswert $y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch $y(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{8t} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{t}$.
○	○	Die zweite Komponente y_2 einer Lösung y des DGL-Systems erfüllt die Differentialgleichung 2. Ordnung $$y_2''(x) - 8y_2'(x) = 0.$$

c) Finden Sie die Lösung der Differentialgleichung $y'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{y(x)}{x} + 1\right)$ für $x > 0$, welche $y(4) = 3$ erfüllt.

d) Lösen Sie das Anfangswertproblem $y'(x) = -3x^2\, e^{y(x)}$ für $x \geq 0$ mit $y(0) = 0$.

4. (*10 Punkte*)

a) **MC-Aufgabe** Kreuzen Sie Ihre Antworten direkt **auf dem Aufgabenblatt** an.

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = 2x^3 - y^2 - 8x - 4y.$$

Welche der folgenden Aussagen sind **richtig** und welche **falsch**?

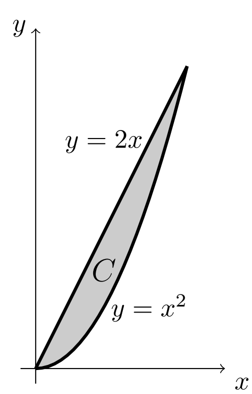
richtig	**falsch**	
○	○	Der Punkt $(-1, 1)$ liegt auf der Niveaulinie von f zur Höhe -3.
○	○	Der Gradient von f ist $$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x^2 - 8 \\ -2y - 4 \end{pmatrix}.$$
○	○	Die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen der Funktion f im Punkt $(1, -2, -2)$ ist gegeben durch $l(x, y) = z = 8 - 2x$.
○	○	Die Funktion f hat bei $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -2\right)$ einen Sattelpunkt.

b) Wir betrachten die Niveaulinie der Funktion f aus Aufgabe **4a)** zur Höhe 0, also die Kurve in $\mathbb{R}^2$, die gegeben ist durch $f(x, y) = 0$.

Rechnen Sie die Steigung dieser Kurve im Punkt $(-2, -4)$ aus.

c) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = 1 - y$.

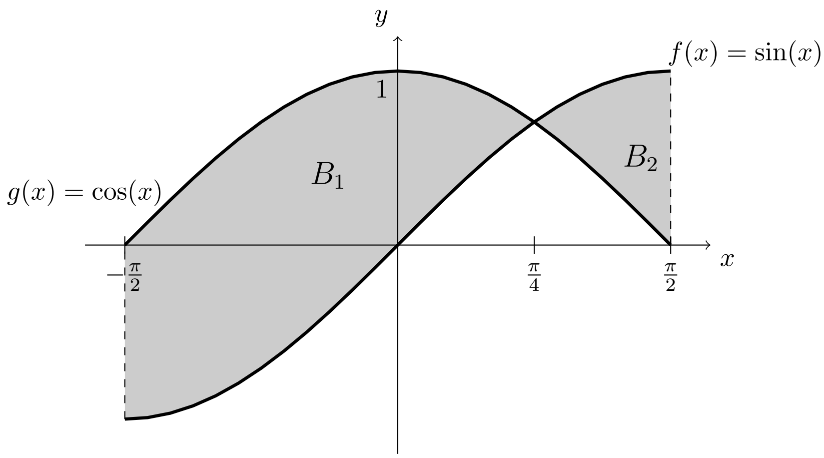
Sei C das Gebiet in der Ebene $\mathbb{R}^2$, welches durch die Gerade $y = 2x$ und die Parabel $y = x^2$ begrenzt wird (siehe Abbildung).



Berechnen Sie das Integral

$$\iint_C f \, dA.$$

d) Sei B das Gebiet in der Ebene $\mathbb{R}^2$, welches durch die Funktionen f mit $f(x) = \sin(x)$ und g mit $g(x) = \cos(x)$ für $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ begrenzt wird (siehe Abbildung).



Das heisst, B setzt sich zusammen aus den Teilgebieten B_1 und B_2.

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Gebietes B. Mit anderen Worten, berechnen Sie

$$\iint_B dA.$$

Bitte wenden!

5. (*14 Punkte*)

a) Sei K das Vektorfeld mit

$$K(x,y) = \begin{pmatrix} 7x + 3y \\ cx + dy \end{pmatrix}.$$

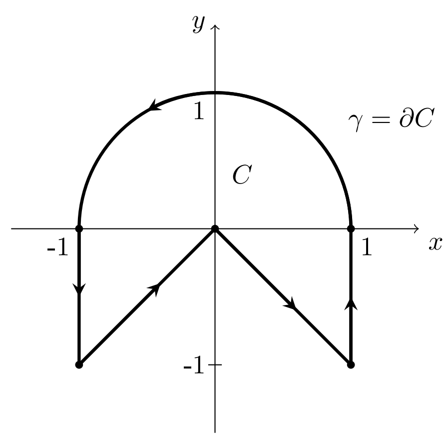
Das Vektorfeld K soll konservativ sein und Divergenz $\operatorname{div}(K) = 2$ haben. Wie müssen $c, d \in \mathbb{R}$ gewählt werden? Geben Sie Ihre Antwort **direkt auf dem Aufgabenblatt** an.

$c =$ ___________ und $d =$ ___________

b) **MC-Aufgabe** Kreuzen Sie Ihre Antworten direkt **auf dem Aufgabenblatt** an.

Sei $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld $K(x,y) = \begin{pmatrix} 3x + 4y \\ 6x - 5y \end{pmatrix}$.

Weiter sei folgende positiv orientierte Kurve γ gegeben, welche das Gebiet C in der (x,y)-Ebene umrandet (die Pfeile kennzeichnen die Durchlaufrichtung):



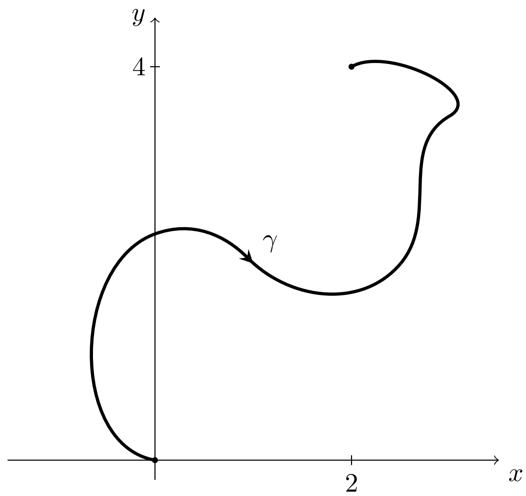
Welche der folgenden Aussagen sind **richtig** und welche **falsch**?

richtig	**falsch**	
○	○	Das Arbeitsintegral vom K entlang γ ist $$\oint_\gamma K \cdot d\gamma = \pi + 2.$$
○	○	Der Fluss von K durch γ von innen nach aussen ist $$\oint_\gamma K \cdot n \, ds = 0.$$
○	○	Das Gebietsintegral der konstanten Funktion 1 über C ist $$\iint_C 1 \, dA = \pi + \frac{1}{2}.$$
○	○	Der Flächeninhalt von C ist $\dfrac{\pi + 2}{2}$.

c) Sei K das Vektorfeld mit

$$K(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}.$$

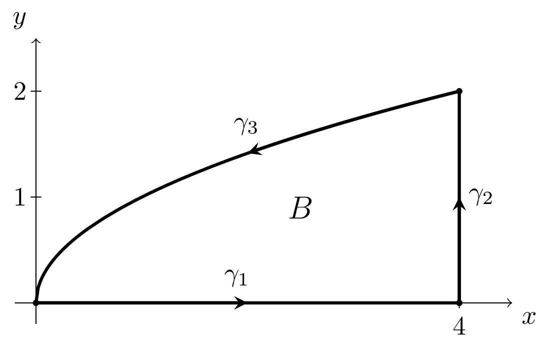
Sei γ eine Kurve in der (x,y)-Ebene von $(0,0)$ bis $(2,4)$ (siehe Abbildung, der Pfeil kennzeichnet die Durchlaufrichtung).



Berechnen Sie das Kurvenintegral von K entlang der Kurve γ, also $\displaystyle\int_\gamma K \cdot d\gamma$.

Bitte wenden!

d) Gegeben seien die drei Kurven γ_1, γ_2 und γ_3, die den Rand des Gebietes B mit Randpunkten $(0,0)$, $(4,0)$ und $(4,2)$ bilden (siehe Abbildung, die Pfeile kennzeichnen die Durchlaufrichtung). Die Kurven γ_1 und γ_2 sind geradlinige Verbindungen, die Kurve γ_3 folgt der Wurzelfunktion $y = \sqrt{x}$.



Geben Sie für γ_1, γ_2 und γ_3 jeweils eine mögliche Parametrisierung an. Achten Sie dabei auf die Durchlaufrichtung. Schreiben Sie Ihre Antwort **direkt auf das Aufgabenblatt**.

$$\gamma_1 : t \mapsto \gamma_1(t) = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} \qquad \text{für} \qquad \mathbf{0 \leq t \leq 4}$$

$$\gamma_2 : t \mapsto \gamma_2(t) = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} \qquad \text{für} \qquad \mathbf{0 \leq t \leq 1}$$

$$\gamma_3 : t \mapsto \gamma_3(t) = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} \qquad \text{für} \qquad \mathbf{0 \leq t \leq 4}$$

Sie müssen Ihre Antworten **nicht** begründen. Schreiben Sie die Antworten **vollständig gekürzt und vereinfacht** direkt auf das Aufgabenblatt. Antworten auf anderen Blättern werden nicht bewertet.

e) Sei K das Vektorfeld mit

$$K(x,y) = \begin{pmatrix} x + 2xy \\ -y^2 + x \end{pmatrix}.$$

Sei $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ die Kurve in der (x,y)-Ebene aus Aufgabe **5d)**, die das Gebiet B begrenzt (siehe Abbildung in Aufgabe **5d)**).

Berechnen Sie das Flussintegral von K durch die Kurve $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ von innen nach aussen, also

$$\oint_\gamma K \cdot n \, ds.$$