Prof. W. Farkas **ETH Zürich, Februar 2018**

D-BIOL, D-CHAB, D-HEST

Prüfung zur Vorlesung Mathematik I/II

Bitte ausfüllen!

Name:	
Vorname:	
Legi-Nr.:	

Nicht ausfüllen!

Aufgabe	Punkte	Kontrolle
1		
2		
3		
4		
5		
6		
Total		

Wichtige Hinweise zur Prüfung

Prüfungsdauer: 3 Stunden.

Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten (nicht Blätter!) mit persönlichen, von Hand geschriebenen Notizen. Keine (Taschen)Rechner. 1 Wörterbuch für fremdsprachige Studierende.

Bitte beachten Sie folgende Punkte:

- Tragen Sie **jetzt** Ihren Namen in das Deckblatt ein und geben Sie es **am Ende** der Prüfung als vorderstes Blatt Ihrer Arbeit ab.
- Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch.
- Beginnen Sie jede Aufgabe **auf einem neuen Blatt**.
- Begründen Sie Ihre Lösungen, soweit nicht anders angegeben. Dabei können Sie bekannte Formeln aus der Vorlesung und den Übungen ohne Herleitung verwenden.
- Schreiben Sie **nicht** mit Bleistift und **nicht** mit roter oder grüner Farbe.
- Benützen Sie **keine** Korrekturstifte. Streichen Sie fehlerhafte Ausdrücke durch und schreiben Sie die Ausdrücke neu.
- Die Reihenfolge der Bearbeitung der Aufgaben ist Ihnen freigestellt. Ordnen Sie jedoch am Ende der Prüfung die Aufgaben für die Abgabe.
- Wir erwarten nicht, dass Sie alle Aufgaben lösen. Versuchen Sie einfach Ihr Bestes!
  Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet.

$\boxed{\text{Viel Erfolg!}}$

Siehe nächstes Blatt!

Aufgaben

---

1. (*11 Punkte*)

Die Antworten in dieser Aufgabe müssen Sie **nicht** begründen. Schreiben Sie die Antworten **vollständig gekürzt und vereinfacht** direkt auf das Aufgabenblatt. Antworten auf anderen Blättern werden nicht bewertet. Für jede korrekt ausgefüllte Lücke gibt es einen Punkt. Es gibt keine Teilpunkte.

a) Berechnen Sie folgenden Grenzwert.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x^2-1} = \underline{\hspace{4cm}}$$

b) Sei $(a_n)_n$ die Folge gegeben durch

$$a_n = \frac{12n^2+5}{2n^2}\cos(\pi + 2\pi n).$$

Berechnen Sie den Grenzwert der Folge.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \underline{\hspace{4cm}}$$

c) Für die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ gilt $f'(x) < 0$ für alle x in $[1, 1+\frac{1}{\sqrt{3}})$ und $f'(x) > 0$ für alle x in $(1+\frac{1}{\sqrt{3}}, 2]$. Markieren Sie die korrekte Antwort.

Die Funktion f besitzt in $x_0 = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ein rel. Minimum/ein rel. Maximum/einen Sattelpunkt.

d) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und sei die Funktion f gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 5x^2 + a + bx & \text{für } x \geq 0 \\ 3\cos(2x) & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Wie müssen a und b gewählt werden, damit die Funktion f an der Stelle $x = 0$ stetig **und** differenzierbar ist?

$a = \underline{\hspace{4cm}}$ und $b = \underline{\hspace{4cm}}$

Bitte wenden!

e) Bestimmen Sie für welches $c \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$\int_0^{1/c} e^{cx}\,dx = 7$$

erfüllt ist.

$$c = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

f) Sei f die Funktion gegeben durch $f(x) = \dfrac{5x-6}{x^2-3x+2}$. Die Partialbruchzerlegung von f ist

$$\frac{5x-6}{x^2-3x+2} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

Die Stammfunktion der Funktion f ist

$$\int f(x)\,dx = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

g) Sei f die Funktion gegeben durch

$$f(x) = (x^2 - 2x)e^x.$$

Finden Sie das Taylor-Polynom 2. Ordnung von f um den Entwicklungspunkt $x_0 = 2$.

$$p(x) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

h) Gegeben sei die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{4^n}.$$

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe.

Der Konvergenzradius ist ____________.

Bestimmen Sie nun den Konvergenzbereich der Potenzreihe.

Der Konvergenzbereich ist ____________.

Siehe nächstes Blatt!

2. (*9 Punkte*)

In der folgenden Aufgabe bezeichnet i die imaginäre Einheit. Es gilt also $i^2 = -1$. Weiter beschreibt $\bar{z}$ die zu einer Zahl z konjugiert komplexe Zahl und $\arg(z)$ das Argument einer komplexen Zahl z.

Die Antworten in dieser Aufgabe müssen Sie **nicht** begründen.

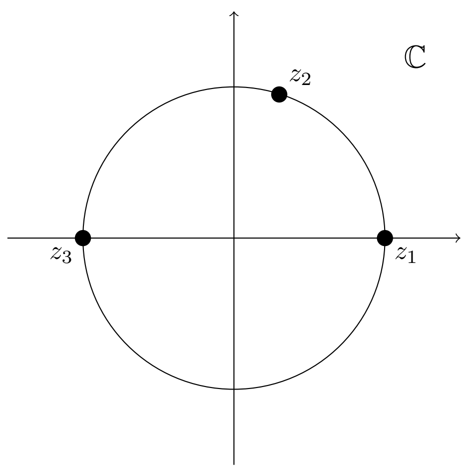
Schreiben Sie die Antworten der Aufgaben **2c) - 2f) vollständig gekürzt und vereinfacht** direkt auf das Aufgabenblatt. Antworten auf anderen Blättern werden nicht bewertet. Für jede korrekt ausgefüllte Lücke gibt es einen Punkt. Es gibt keine Teilpunkte.

Die **Aufgabe 2a) und 2b)** lösen Sie auf einem separaten Blatt.

a) Stellen Sie folgende Menge komplexer Zahlen in der Gauss'schen Zahleneben $\mathbb{C}$ dar.

$$\left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, 1 \leq |\mathrm{Im}(z)| \leq 3 \text{ und } \frac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq \frac{3}{2}\pi\right\}$$

b) Begründen Sie, wieso es keine **reelle** Zahl $a \in \mathbb{R}$ geben kann, sodass die Gleichung $z^3 = a$ folgende drei Lösungen z_1, z_2, z_3 in den komplexen Zahlen besitzt.



c) Die Gleichung

$$z^3 = -1$$

besitzt drei Lösungen z_1, z_2 und z_3 in den komplexen Zahlen. Schreiben Sie Ihre Antwort **direkt auf das Aufgabenblatt.**

$z_1 =$ ______________ $z_2 =$ ______________ $z_3 = -1$

Bitte wenden!

d) Sei $b \in \mathbb{R}$ und sei
$$z = 2e^{i\frac{\pi}{6}}\left(b + i\sqrt{3}\right).$$
Wie muss b gewählt werden, damit z eine reelle Zahl ist? Das heisst, damit $\mathrm{Im}(z) = 0$ gilt? Schreiben Sie Ihre Antwort **direkt auf das Aufgabenblatt.**

$$b = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

e) Schreiben Sie folgende komplexe Zahl **in kartesischer Darstellung** $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

$$(1+i)^2(-1+i)^4 = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

f) Es gibt zwei komplexe Zahlen z_1 und z_2, welche folgende Bedingungen erfüllen:
$$\arg(z^2) = \frac{\pi}{2} \qquad \text{und} \qquad |\mathrm{Re}(z)| = \sqrt{2}$$
Bestimmen Sie z_1 und z_2. Schreiben Sie Ihre Antwort **direkt auf das Aufgabenblatt.**

$$z_1 = \underline{\qquad\qquad\qquad} \qquad \text{und} \qquad z_2 = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

3. (*10 Punkte*)

a) Gegeben sei folgendes lineare Gleichungssystem.

$$\begin{cases} 3x_1 \phantom{{}-2x_2} + 3x_3 &= 6 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\ \phantom{2x_1 - {}} 4x_2 - 2x_3 &= -2 \end{cases}$$

i) Schreiben Sie dieses Gleichungssystem in Matrixschreibweise $Ax = b$, wobei A eine $(3,3)$-Matrix ist, b ein Vektor der Länge 3 und $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ der Vektor der Unbekannten.

ii) Lösen Sie nun dieses lineare Gleichungssystem mit dem Gauss-Verfahren und geben Sie die Lösungsmenge an.

b) Seien $m \in \mathbb{R}$ und B die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ m & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

i) Rechne Sie die Determinante von B aus.

ii) Sei nun $m = 1$. Dann ist $\lambda = 4$ ein Eigenwert von B. Finden Sie einen Eigenvektor von B (mit $m = 1$) zum Eigenwert $\lambda = 4$.

iii) Sei wieder $m = 1$ und somit $\lambda = 4$ ein Eigenwert von B. Finden Sie die weiteren Eigenwerte von B (mit $m = 1$).

iv) Für $m = 3$ sind $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -2$ zwei Eigenwerte von B. Wie lautet der fehlende Eigenwert λ_3 von B (mit $m = 3$)?

Hinweis: Sie müssen das charakteristische Polynom nicht ausrechnen.

c) Die Matrix C sei

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es gibt zwei reelle Zahlen x, y, sodass die Inverse von C folgende Gestalt besitzt

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ y & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie x und y.

Bitte wenden!

4. (*10 Punkte*)

a) Sei f die Funktion gegeben durch

$$f(x,y) = x^2 + 4xy + y^3 + 4y.$$

Bestimmen Sie alle kritischen Punkte der Funktion f. Geben Sie zusätzlich an, ob es sich jeweils um ein relatives Minimum, ein relatives Maximum oder einen Sattelpunkt handelt.

b) Bestimmen Sie die (relativen) Extrema der Funktion

$$f(x,y) = xy$$

unter der Nebenbedingung $x^2 = 1 - y$.

Hinweis: Bei den gefundenen relativen Extrema müssen Sie **nicht** bestimmen, ob es sich um relative Maxima oder relative Minima handelt.

c) Gegeben sei folgendes Gebiet A in der xy-Ebene

$$A = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0 \text{ und } x - 2 \leq y \leq 4 - x^2\big\}.$$

i) Skizzieren Sie das Gebiet A in der Ebene.

ii) Berechnen Sie das Integral der Funktion $f(x,y) = x - 1$ über dieser Fläche, also

$$\iint_A (x-1)\, dxdy.$$

5. (*10 Punkte*)

a) Finden Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) = 8 - 3y(x).$$

b) Finden Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = xe^{-y(x)} \qquad \text{mit } y(0) = 0.$$

c) Finden Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = 4e^{3x} \qquad \text{mit } y(0) = 0 \text{ und } y(1) = 0.$$

6. (*10 Punkte*)

a) Die Kurven γ_1 und γ_2 seien gegeben durch die Parametrisierung

$$\gamma_1: \qquad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t+1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad -1 \leq t \leq 1$$

$$\gamma_2: \qquad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2-4 \\ t \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad -2 \leq t \leq 2.$$

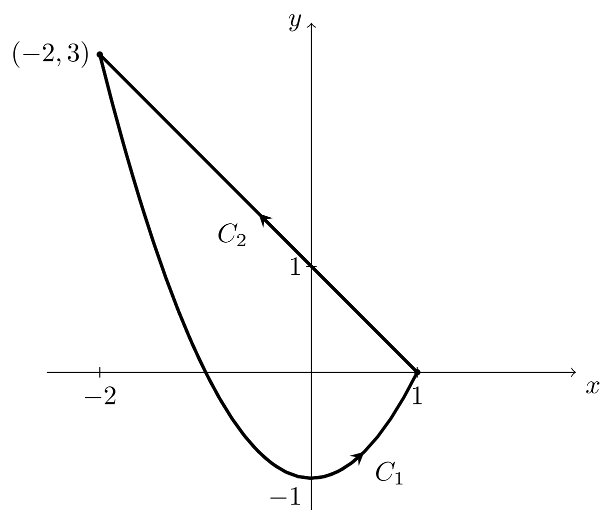
Zeichnen Sie die beiden Kurven γ_1 und γ_2 in ein Koordinatensystem auf einem **separaten** Blatt. Zeichnen Sie jeweils auch die Durchlaufrichtung ein!

Die folgenden Aufgaben sind **nicht** von der Teilaufgabe **a)** abhängig.

Sei ein Vektorfeld $\vec{F}$ in der Ebene gegeben durch

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} xe^x \\ x^2-y \end{pmatrix}.$$

Weiter seien die Kurven C_1 und C_2 in der folgenden Abbildung gegeben (die Pfeile kennzeichnen die Durchlaufrichtung!). Die Kurve C_1 folgt der Funktion $y = x^2 - 1$ von $(-2,3)$ bis $(1,0)$; die Kurve C_2 ist die geradlinige Verbindungen von $(1,0)$ nach $(-2,3)$.



b) Geben Sie für C_1 und C_2 jeweils eine mögliche Parametrisierung durch einen Ortsvektor $\vec{r}(t)$ an. Achten Sie dabei auf die Durchlaufrichtung. Schreiben Sie Ihre Antwort **direkt auf das Aufgabenblatt**. Sie müssen Ihre Antwort **nicht** begründen. Antworten auf anderen Blättern werden nicht bewertet.

$$C_1: \qquad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad \_\_\_\_\_\_ \leq t \leq \_\_\_\_\_\_$$

$$C_2: \qquad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad \_\_\_\_\_\_ \leq t \leq \_\_\_\_\_\_$$

c) Berechnen Sie das Linienintegral des Vektorfeldes $\overrightarrow{F}$ entlang der Kurve C_1, also

$$\int_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}.$$

d) Sei $C = C_1 + C_2$ die geschlossene Kurve, die aus den zwei Teilkurven C_1 und C_2 zusammengesetzt ist. Berechnen Sie mithilfe der **Formel von Green** das Linienintegral des Vektorfeldes $\overrightarrow{F}$ entlang der Kurve $C = C_1 + C_2$, also

$$\oint_{C} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}.$$