Dr. A. Caspar **ETH Zürich, Winter 2019**

D-BIOL, D-CHAB, D-HEST
Lösung zur Prüfung Mathematik I/II

---

1. **a)** (i) Mit der Produktregel erhalten wir $f'(x) = e^x(x^3 + 3x^2 - 1)$.

(ii) Mit der Definition des Taylor-Polynoms folgen $a_0 = f(1) = 0$ und $a_1 = f'(1) = 3e$.

b) Wir verwenden de l'Hospital und sehen

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin(x)\cdot x}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi} \frac{\cos(x)x + \sin(x)}{1} = -\pi.$$

c) (i) Um die Fixpunkte zu bestimmen, lösen wir die Fixpunktlgleichung $x^3 - 7x^2 + 13x = x$. Deren Lösungen sind die Lösungen der Gleichung

$$x^3 - 7x^2 + 12x = 0 = x(x^2 - 7x + 12).$$

Die Nullstelle $x_1 = 0$ liest sich direkt ab, und die beiden anderen $x_2 = 3$ und $x_3 = 4$ folgen als Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 - 7x + 12 = (x-3)(x-4) = 0$.

(ii) Wir berechnen die Ableitung $g'(x) = 3x^2 - 14x + 13$ und setzen die Fixpunkte ein: $g'(x_1) = 13$, $g'(x_2) = -2$, $g'(x_3) = 5$. Da für alle drei Fixpunkte $|g'(x_i)| > 1$, kann keiner Grenzwert sein, deswegen:

- ⊗ **(A)** Für keinen.
- ◯ **(B)** Für den Kleinsten, für die Restlichen nicht.
- ◯ **(C)** Für den Grössten, für die Restlichen nicht.
- ◯ **(D)** Für alle.

(iii) Wir berechnen die Nullstellen von $g'(x) = 3x^2 - 14x + 13$ mit $\dfrac{7 \pm \sqrt{10}}{3}$.
Damit folgt $a = \dfrac{7-\sqrt{10}}{3}$ und $b = \dfrac{7+\sqrt{10}}{3}$.
Zwischen diesen ist die Ableitung negativ und damit die Funktion streng monoton fallend.

d) Es gilt $\displaystyle\int \frac{6x^2+2}{x^3+x}dx = 2\ln(x^3+x) + C$. Der Trick ist hier, dass $\dfrac{6x^2+2}{x^3+x} = 2\dfrac{3x^2+1}{x^3+x}$, und im Zähler die Ableitung des Nenners steht.

e) Zuerst berechnen wir (mit Partieller Integration) eine Stammfunktion:
$\displaystyle\int e^{(x+2)}(x+2)dx = e^{(x+2)}(x+1) + C.$
Dann ist das bestimmte Integral mit dem Hauptsatz:

$$\int_0^1 e^{(x+2)}(x+2)dx = e^{(x+2)}(x+1)\Big|_0^1 = e^{(1+2)}(1+1) - e^{(0+2)}(0+1) = 2e^3 - e^2.$$

2. **a)** (i) $\mathrm{Re}(z_1) = \frac{1}{2}$, $\mathrm{Im}(z_1) = -\frac{1}{2}$, **CAVE: nicht** $\mathrm{Im}(z_1) = -\frac{i}{2}$. Folgt durch Erweiterung von Zähler und Nenner mit dem Konjugierten des Nenner.

(ii) $\mathrm{Re}(z_1) = -\frac{3}{2}$, $\mathrm{Im}(z_1) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Folgt aus Überlegungen mit den Standardwinkeln, vergleiche Tabellen in der Vorlesung.

b) (i) Das Produkt $e^{\frac{2}{3}\pi i}(c - \sqrt{3}i)$ auf der Imaginären Achse muss das Argument $\pm\frac{\pi}{2}$ haben. Mit negativem Imaginärteil kann $c - \sqrt{3}i$ nur ein negatives Argument haben, das heisst, c muss so gewählt sein, dass $e^{\frac{2}{3}\pi i}(c - \sqrt{3}i)$ eine Drehung von $e^{\frac{2}{3}\pi i}$ um $-\frac{\pi}{6}$ ist.

○ **(A)** $c = -\sqrt{3}$. Liegt im falschen Quadranten mit $-\pi < \arg(c - \sqrt{3}i) < -\frac{\pi}{2}$.

⊗ **(B)** $c = 3$. Es ist $e^{\frac{2}{3}\pi i}(3 - \sqrt{3}i) = 2\sqrt{3}i$.

○ **(C)** $c = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Liegt im falschen Quadranten mit $-\pi < \arg(c - \sqrt{3}i) < -\frac{\pi}{2}$.

○ **(D)** $c = \sqrt{3}$. Liegt auf der Diagonalen mit Argument $-\frac{\pi}{4}$.

(ii) Wir setzen $c = 0$ und berechnen $e^{\frac{2}{3}\pi i}(-\sqrt{3}i) = \sqrt{3}(e^{\frac{2}{3}\pi i})(e^{-\frac{\pi}{2}i}) = \sqrt{3}e^{\frac{\pi}{6}i}$, das ergibt $|z| = \sqrt{3}$ und $\arg(z) = \frac{\pi}{6}$.

c) Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

(i) $\det(A) = 0$, da die Matrix hat zwei gleiche Spalten hat.

(ii) Der Eigenwert $\lambda_0 = 0$ ergibt sich aus $\det(A) = 0 =$ Produkt der EW.
Die EW sind die Nullstellen von $-x(40 - 14x + x^2)$. Da wir $\lambda_1 = 4$ kennen, ist $\lambda_2 = \frac{40}{4} = 10$.

(iii) Die EV sind von der Form $t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}, t \neq 0$. Das folgt direkt aus den zwei gleichen Spalten.

d) Aus $p_B(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 11)$ berechen wir die Eigenwerte $\lambda_1 = 0$, $\lambda_1 = 1 - \sqrt{10}i$, $\lambda_2 = 1 + \sqrt{10}i$ und deren Beträge $|\lambda_1| = 0$, $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{11}$.

richtig	**falsch**	
○	⊗	Die Matrix B hat den Rang 3.
⊗	○	Die Determinate von B ist gleich Null.
⊗	○	Jeder Eigenwert der Matrix hat den Betrag kleiner oder gleich $2\sqrt{3}$.
○	⊗	Das Produkt der Eigenwerte ist eine positive reelle Zahl.
⊗	○	Die Summe der Eigenwerte ist eine positive reelle Zahl.
○	⊗	Wir betrachten eine Folge von Vektoren $(v_n)_n$ mit $v_{n+1} = B \cdot v_n$. Für jeden Startvektor v_0 mit positiven Koordinaten konvergiert diese Folge für $n \to \infty$ gegen den Nullvektor.

3. **a)** (i) Setze $y'_\infty = 0 = -4y_\infty + 8$. Daraus berechnen wir $a = y_\infty = 2$.

(ii) Wir wissen, dass die DGL $y' = ay + b$ mit konstanten Koeffizienten die allgemeine Lösung

$$y(x) = C \cdot e^{a \cdot x} - \frac{b}{a}$$

hat. Also hier mit $a = -4$ und $b = 8$ folgt $\alpha = -4$, $\beta = 2$.

Siehe nächstes Blatt!

b) Mit dem Anfangswert $y(0) = 0$ folgt $C + 5 = 0$ also ist $C = -5$.

Daraus erhalten wir $y(x) = -5 \cdot e^{2 \cdot x} + 5$ und $y\left(\frac{1}{2}\ln(2)\right) = -5$.

c) Aus der Differentialgleichung sehen wir, dass es drei stationäre Lösungen gibt, nämlich $y(x) \equiv -2$, $y(x) \equiv 2$ und $y(x) \equiv 5$. Der Anfangswert ist $y(0) = 3$ und die Ableitung zwischen 2 und 5 ist negativ, daher konvergiert die Lösung des AWPs gegen 2.

○ **(A)** $\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$.

○ **(B)** $\lim_{x \to \infty} f(x) = 5$.

⊗ **(C)** $\lim_{x \to \infty} f(x) = 2$

○ **(D)** $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$.

d) (i) Die dazugehörige homogene Differentialgleichung ist $y'(x) = (3x^2 + 1)y(x)$ und deren Lösung ist $y(x) = Ke^{x^3+x}$ für ein beliebiges $K \in \mathbb{R}$.

(ii) *Variation der Konstanten: Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL $y'(x) = p(x)y(x) + q(x)$ ist dann*

$$y(x) = (K_0(x) + C)\ e^{P(x)},$$

mit

- $P'(x) = p(x)$
- *C eine Konstante*
- $K_0(x) \in \int q(x)\ e^{-P(x)}\ dx$ *eine beliebige festgewählte Stammfunktion von $x \mapsto q(x)e^{-P(x)}$.*

Hier ist $\int q(x)\ e^{-P(x)}\ dx = \int e^{x^3} \cdot e^{-x^3-x}\ dx = \int e^{-x}\ dx$.

Berechne $\int e^{-x}\ dx = -e^{-x} + C$. Zusammen $y(x) = (-e^{-x} + C)e^{x^3+x}$.

(iii) Mit Anfangswert $y(0) = 1$ setzen wir $y(0) = (-1 + C) = 1$, also ist $C = 2$, und die gewünschte Lösung ist $y(x) = (-e^{-x} + 2)e^{x^3+x}$.

e) Mit den Formeln aus der Vorlesung $(-(a_1 + 9) = -9)$ und $\det(A) = 3)$ folgt $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$ und somit $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ und $a_3 = -3$.

4. **a)** (i) Es ist $c = f(-2, 2) = e^{-8} + 3$.

(ii) Zuerst berechnen wir die partiellen Ableitungen $f_x(x, y) = y^2 e^{xy^2} + (x^2 + 2x - 1)e^{x+y}$ und $f_y(x, y) = 2xye^{xy^2} + (x^2 - 1)e^{x+y}$. Die Tangentialebene ist somit

$$l(x, y) = f(3, 0) + f_x(3, 0)(x - 3) + f_y(3, 0)(y - 0) = 1 + 8e^3 + 14e^3(x - 3) + 8e^3 y.$$

b) Wir berechnen $g_x(x, y) = 9x^2 - 4$ und $g_y(x, y) = -2y$ und deren gemeinsame Nullstellen $(-\frac{2}{3}, 0)$ und $(\frac{2}{3}, 0)$.

c) Wir berechnen $D(-2, 6) = h_{xx}(-2, 6)h_{yy}(-2, 6) - h_{xy}^2(-2, 6) = 2 \cdot (6y - 18)|_{y=6} - 0 = 36$. Es handelt sich also um ein Extremum, und da $h_{xx}(-2, 6) = 2 > 0$, es ist in der Tat ein Minimum.

Bitte wenden!

d) Mit der Formel für implizite Differentialrechnung bekommen wir

$$\text{Steigung im } (2,1) = -\frac{k_x(2,1)}{k_y(2,1)} = -\frac{8}{1} = -8.$$

e) (i) Wir lesen direkt ab: $B = \left\{(r,\varphi) : 0 \le r \le 1, \frac{\pi}{2} \le \varphi \le 2\pi\right\}$

(ii) Wir rechnen mit Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned}\iint_B l(x,y)dA &= \iint_B 2 + y\,dA \\ &= \underbrace{\frac{3}{2}\pi}_{2\cdot\text{Fläche Kreisstück}} + \int_0^1 \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \sin\varphi \cdot r^2 d\varphi dr \\ &= \frac{3}{2}\pi - \int_0^1 r^2 dr \\ &= \frac{3}{2}\pi - \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

5. **a)** (i) Nach Berechnung von f_x und f_y:

○ **(A)** $\nabla f = \begin{pmatrix} \sin(x)y^2 \\ -2\cos(x)y \end{pmatrix}$

○ **(B)** $\nabla f = \begin{pmatrix} 2\cos(x)y \\ -\sin(x)y^2 \end{pmatrix}$

⊗ **(C)** $\nabla f = \begin{pmatrix} -\sin(x)y^2 \\ 2\cos(x)y \end{pmatrix}$

○ **(D)** $\nabla f = \begin{pmatrix} 2\cos(x)y \\ \sin(x)y^2 \end{pmatrix}$

(ii) Das Potential von K ist f und mit den Hauptsatz über Gradietenfelder folgt:

$$\int_\gamma K \cdot d\gamma = f(3\pi, 2\pi) - f\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = -(2\pi)^2 - 0 = -4\pi^2.$$

b) Ein Vektorfeld $K = (P,Q)$ hat eine Potentialfunktion, wenn es konservativ ist, und das ist hier äquivalent zu $P_y = Q_x$. Nach Berechnungen folgt:

○ **(A)** $K(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2y \\ 3xy^2 \end{pmatrix}$

⊗ **(B)** $K(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2y \\ x^3 \end{pmatrix}$

○ **(C)** $K(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2y \\ 6xy \end{pmatrix}$

○ **(D)** $K(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2y \\ 3x^2y \end{pmatrix}$

Siehe nächstes Blatt!

c) Nach Einsetzen von zum Beispiel $t = 0$ und $t = \pi$ bleibt nur:

⊗ **(A)** $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) + 1 \\ 2\cos(t) \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$

○ **(B)** $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(t) + 1 \\ \sin(t) \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$

○ **(C)** $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) - 1 \\ 2\sin(t) \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$

○ **(D)** $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2\sin(t) - 1 \\ \cos(t) \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$

d) Gegeben sei das Vektorfeld K mit $K(x, y) = \begin{pmatrix} x^2y^2 - \cos(y) \\ xe^{x^2} - \frac{2}{3}xy^3 + y \end{pmatrix}$. Sei B das Gebiet, welches durch die Geraden $y = 0$, $x = 1$ und den Grahpen des Polynoms $p(x) = \frac{1}{2}(x + 2)(x^2 + 1)$ begrenzt wird:

(i) Wir erhalten $a = -2$ als die (einzige) Nullstelle von $p(x) = \frac{1}{2}(x + 2)(x^2 + 1)$.

(ii) Zuerst berechnen wir $\operatorname{div}(K)(x, y) = 2xy^2 - 2xy^2 + 1 = 1$.
Wir setzen $\operatorname{div}(K)(x, y)$ in das Integral ein:

$$\iint_B \operatorname{div}(K)(x, y) dA = \iint_B dA = \int_{-2}^{1} \frac{1}{2}(x + 2)(x^2 + 1) dx = \int_{-2}^{1} \frac{1}{2}(x^3 + 2x^2 + x + 2) dx$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x\right)\Big|_{x=-2}^{1} = \frac{27}{8}.$$

e) Die Kurve γ berandet das Dreieck mit positiver Durchlaufrichtung, und die Formel von Green für ein Vektorfeld $K = (P, Q)$ besagt dann:

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma K d\gamma &= \iint_B (Q_x - P_y)\, dA \\
&= \iint_B 2x(b + 1)\, dA \\
&= \int_{-1}^{1} \int_0^{\frac{x+1}{2}} 2x(b + 1)\, dy dx \\
&= \int_{-1}^{1} (x^2 + x)(b + 1) dx = \frac{2(b + 1)}{3}
\end{aligned}$$

Daraus erhalten wir $b = \frac{1}{2}$.