Dr. A. Caspar

ETH Zürich, Februar 2019

D-BIOL, D-CHAB, D-HEST

Prüfung zur Vorlesung Mathematik I/II

Bitte ausfüllen!

Name:	
Vorname:	
Legi-Nr.:	

Nicht ausfüllen!

Aufgabe	Punkte	Kontrolle
1		
2		
3		
4		
5		
Total		

Vollständigkeit	

Bitte wenden!

Wichtige Hinweise zur Prüfung

Prüfungsdauer: 3 Stunden.

Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten (**nicht** Blätter) mit persönlichen, von Hand geschriebenen Notizen. Keine (Taschen)Rechner. 1 Wörterbuch für fremdsprachige Studierende.

Bitte beachten Sie folgende Punkte:

- Tragen Sie **jetzt** Ihren Namen in das Deckblatt ein.
- Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch.
- Schreiben Sie **nicht** mit Bleistift und **nicht** mit roter oder grüner Farbe.
- Beantworten Sie die Aufgaben (wenn nicht anders angegeben) **direkt auf dem Prüfungsblatt**. Zwischenschritte werden (wenn nicht anders angegeben) nicht bewertet.
- Tragen Sie Ihre Antwort auf die dafür vorgesehe Linie ein ("**Antwort:** _____"), beziehungsweise bei Single-Choice-Aufgaben kreuzen Sie Ihre Antwort an ("$\otimes$").
  Antworten oder Kreuze an anderen Stellen werden nicht bewertet.
- Es gibt zwei Formate bei den Single-Choice-Aufgaben:
  - **1 aus 4:** Hier ist **genau eine** Antwort korrekt. Für das korrekte Kreuz gibt es einen Punkt.
  - **Richtig/Falsch:** Für das korrekte Kreuz gibt es einen halben Punkt.

  Punktabzug bei falschen Antworten gibt es nicht.
- Es gibt **Teilaufgaben, die auf separatem Blatt** beantwortet werden. Nur bei diesen Teilaufgaben werden auch Zwischenschritte bewertet. Bei diesen Teilaufgaben gibt es einen entsprechenden Hinweis ("**Bearbeiten Sie Ihre Antwort auf einem separatem Blatt. Zwischenschritte werden bewertet.**").
- Wir erwarten nicht, dass Sie alle Aufgaben lösen. Versuchen Sie einfach Ihr Bestes! Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet. Die Reihenfolge der Bearbeitung der Aufgaben ist Ihnen freigestellt.
- **Am Ende der Prüfung**
  1. Ordnen Sie Ihre zusätzlichen Lösungsblätter nach Aufgaben.
  2. Stecken Sie diese zusammen mit Ihrer Prüfung zuoberst in den bereitliegenden Umschlag. Dieser wird am Ende eingesammelt.

Viel Erfolg!

Siehe nächstes Blatt!

Aufgaben

---

1. (*10 Punkte*)

a) Betrachten Sie die Funktion f mit $f(x) = e^x(x^3 - 1)$.

(i) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion f.

Antwort: $f'(x) =$ ____________________________

(ii) Sei $T_1(x) = a_0 + a_1(x - 1)$ das erste Taylor-Polynom von f an der Stelle $x_0 = 1$.

Berechnen Sie a_0 und a_1.

Antwort: $a_0 =$ ______________ $a_1 =$ ______________

b) Berechnen Sie $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin(x) \cdot x}{x - \pi}$.

Antwort: $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin(x) \cdot x}{x - \pi} =$ ______________

c) Betrachten Sie die Funktion g mit $g(x) = x^3 - 7x^2 + 13x$.

(i) Bestimmen Sie die Fixpunkte der Funktion g.

Antwort: ____

(ii) Sei $(x_n)_n$ eine Folge mit Reproduktionsfunktion g, das heisst, $x_{n+1} = g(x_n)$. Sei x_0 jeweils ein Startwert der Folge in der Nähe eines Fixpunktes $\tilde{x}$ von g.

Für welche Fixpunkte $\tilde{x}$ aus (i) gilt dann $\tilde{x} = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$?

○ **(A)** Für keinen.

○ **(B)** Für den Kleinsten, für die Restlichen nicht.

○ **(C)** Für den Grössten, für die Restlichen nicht.

○ **(D)** Für alle.

(iii) Die Funktion g ist auf einem Intervall $]a, b[$ streng monoton fallend. Bestimmen Sie a und b.

Antwort: $a =$ ______________ $b =$ ______________

Bitte wenden!

d) Sei $x > 0$. Berechnen Sie $\displaystyle\int \frac{6x^2+2}{x^3+x}dx$.

Dabei können Sie die Integrationskonstante gleich Null setzen.

Antwort: $\displaystyle\int \frac{6x^2+2}{x^3+x}dx =$ __________________________

e) Berechnen Sie das bestimmte Integral $\displaystyle\int_0^1 e^{(x+2)}(x+2)dx$.

Bearbeiten Sie Ihre Antwort auf einem separatem Blatt. Zwischenschritte werden bewertet.

2. (*14 Punkte*)

a) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil von

(i) $z_1 = \dfrac{3-2i}{5+i}$;

Antwort: $\mathrm{Re}(z_1) =$ ____________________ $\mathrm{Im}(z_1) =$ ____________________

(ii) z_2 mit $|z_2| = 3$, $\arg(z_2) = \dfrac{2}{3}\pi$.

Antwort: $\mathrm{Re}(z_2) =$ ____________________ $\mathrm{Im}(z_2) =$ ____________________

b) Sei $z = e^{\frac{2}{3}\pi i}(c - \sqrt{3}i)$ eine komplexe Zahl, die von dem reellen Parameter c abhängt.

(i) Für welches c unten gilt $\mathrm{Re}(z) = 0$?

○ **(A)** $c = -\sqrt{3}$.

○ **(B)** $c = 3$.

○ **(C)** $c = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

○ **(D)** $c = \sqrt{3}$.

(ii) Sei $c = 0$. Geben Sie z in Polarkoordinaten an.

Antwort: $|z| =$ ____________________ $\arg(z) =$ ____________________

c) Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

(i) Bestimmen Sie die Determinante von A

Antwort: $\det(A) =$ __________

(ii) Die Eigenwerte von A sind $\lambda_1 = 4$ und

Antwort: $\lambda_2 =$ __________ $\lambda_3 =$ __________

(iii) Bestimmen Sie einen Vektor w mit $A \cdot w = 0$ und $w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Bearbeiten Sie Ihre Antwort auf einem separatem Blatt. Zwischenschritte werden bewertet.

d) Sei $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ mit charakteristischem Polynom $p_B(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 11)$.

Entscheiden Sie jeweils, ob die Aussage richtig oder falsch ist.

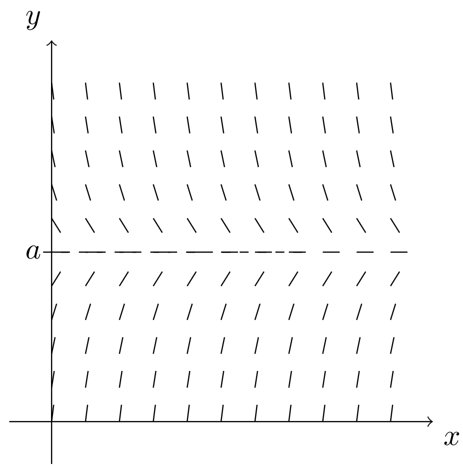
Hinweis: Eigenwerte können auch komplexe Zahlen sein.

richtig	**falsch**	
◯	◯	Die Matrix B hat den Rang 3.
◯	◯	Die Determinate von B ist gleich Null.
◯	◯	Jeder Eigenwert der Matrix hat den Betrag kleiner oder gleich $2\sqrt{3}$.
◯	◯	Das Produkt der Eigenwerte ist eine positive reelle Zahl.
◯	◯	Die Summe der Eigenwerte ist eine positive reelle Zahl.
◯	◯	Wir betrachten eine Folge von Vektoren $(v_n)_n$ mit $v_{n+1} = B \cdot v_n$. Für jeden Startvektor v_0 mit positiven Koordinaten konvergiert diese Folge für $n \to \infty$ gegen den Nullvektor.

3. (*13 Punkte*)

a) Gegeben sei die Differentialgleichung $y'(x) = -4y(x) + 8$.

(i) Folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Richtungsfeldes, welches zu der Differentialgleichung gehört.



Bestimmen Sie a.

Antwort: $a =$ ____________

(ii) Sei y mit $y(x) = C \cdot e^{\alpha \cdot x} + \beta$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.
Bestimmen Sie α und β.

Antwort: $\alpha =$ ____________ $\beta =$ ____________

b) Sei $y(x) = C \cdot e^{2 \cdot x} + 5$ die Lösung einer Differentialgleichung mit dem Anfangswert $y_0 = y(0) = 0$.
Bestimmen Sie den Wert $y\left(\frac{1}{2}\ln(2)\right)$.

Bearbeiten Sie Ihre Antwort auf einem separatem Blatt. Zwischenschritte werden bewertet.

Bitte wenden!

c) Gegeben sei ein Anfangswertproblem (AWP):

$$y'(x) = (y(x)+2)(y(x)-2)(y(x)-5), \quad y(0) = 3.$$

Welche Aussage über die Lösung y des AWPs ist korrekt?

- ◯ **(A)** $\lim_{x\to\infty} y(x) = +\infty$.
- ◯ **(B)** $\lim_{x\to\infty} y(x) = 5$.
- ◯ **(C)** $\lim_{x\to\infty} y(x) = 2$.
- ◯ **(D)** $\lim_{x\to\infty} y(x) = -\infty$.

d) Wir betrachten die folgende inhomogene Differentialgleichung:

$$y'(x) - (3x^2+1)y(x) = e^{x^3}.$$

(i) Geben Sie die allgemeine Lösung der dazugehörigen homogenen Differentialgleichung an.

Antwort: $y(x) =$ ____________________________

(ii) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung durch Variation der Konstanten.

Bearbeiten Sie Ihre Antwort auf einem separatem Blatt. Zwischenschritte werden bewertet.

(iii) Gegeben sei der Anfangswert $y(0) = 1$. Bestimmen Sie die eindeutige Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu diesem Anfangswert.

Bearbeiten Sie Ihre Antwort auf einem separatem Blatt. Zwischenschritte werden bewertet.

e) Gegeben seien die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y''(x) - 9y'(x) + 3y(x) = 0.$$

und ein (2×2)-Differentialgleichungssystems $\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$ mit $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & 9 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die fehlenden Einträge a_1, a_2 und a_3, sodass mit der allgemeinen Lösung des Systems die allgemeine Lösung der Differentialgleichung bestimmt werden kann.

Hinweis: Sie müssen weder für die Differentialgleichung noch für das System die allgemeine Lösung angeben.

Bearbeiten Sie Ihre Antwort auf einem separatem Blatt. Zwischenschritte werden bewertet.

4. (*12 Punkte*)

a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = e^{xy^2} + (x^2 - 1)e^{x+y}$.

(i) Bestimmen Sie die Höhe c der Niveaulinie zum Punkt $(-2, 2)$.

Antwort: $c =$ ____________

(ii) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene $l(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an den Graphen der Funktion f im Punkte $(3, 0, 1 + 8e^3)$.

Bearbeiten Sie Ihre Antwort auf einem separatem Blatt. Zwischenschritte werden bewertet.

b) Betrachten Sie die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch $g(x, y) = 3x^3 - y^2 - 4x + 6$. Geben Sie alle kritischen Punkte von g an.

Antwort: ____

c) Sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion gegeben durch $h(x, y) = x^2 + y^3 - 9y^2 + 4x$. Die kritischen Punkte von h sind $(-2, 0)$ und $(-2, 6)$. Der kritische Punkt $(-2, 6)$ ist

○ **(A)** ein lokales Maximum.

○ **(B)** ein Sattelpunkt.

○ **(C)** ein lokales Minimum.

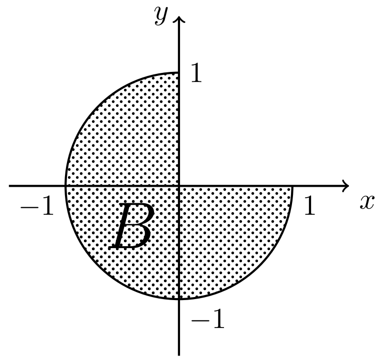
○ **(D)** Keines von diesen.

d) Sei $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $k(x, y) = x^2 - y^3 + x^2y - 7$. Wir betrachten die Niveaulinie der Funktion k zur Höhe 0, also die Kurve in $\mathbb{R}^2$, die durch $k(x, y) = 0$ gegeben ist.

Bestimmen Sie die Steigung der Tangente an diese Kurve im Punkt $(2, 1)$.

Bearbeiten Sie Ihre Antwort auf einem separatem Blatt. Zwischenschritte werden bewertet.

e) Wir haben das folgende einfache geschlossene Gebiet B (Dreiviertelkreis):



Der Abschnitt auf der x-Achse und y-Achse gehört jeweils zu B.

(i) Beschreiben Sie B als einfaches Gebiet in Polarkoordinaten:

Antwort: $B =$ ____

(ii) Sei $l(x,y) = 2 + y$. Berechnen Sie

$$\iint_B l(x,y)dA.$$

Bearbeiten Sie Ihre Antwort auf einem separatem Blatt. Zwischenschritte werden bewertet.

5. (*11 Punkte*)

a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion gegeben durch $f(x, y) = \cos(x)y^2$.

(i) Wie lautet der Gradient ∇f von f?

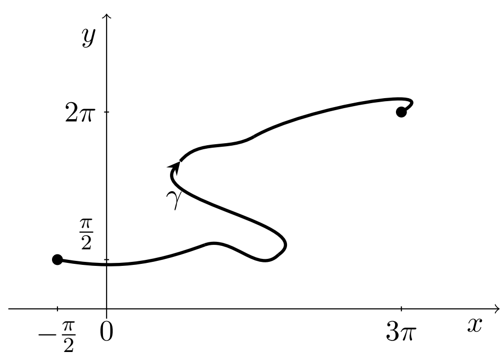
○ **(A)** $\nabla f = \begin{pmatrix} \sin(x)y^2 \\ -2\cos(x)y \end{pmatrix}$

○ **(B)** $\nabla f = \begin{pmatrix} 2\cos(x)y \\ -\sin(x)y^2 \end{pmatrix}$

○ **(C)** $\nabla f = \begin{pmatrix} -\sin(x)y^2 \\ 2\cos(x)y \end{pmatrix}$

○ **(D)** $\nabla f = \begin{pmatrix} 2\cos(x)y \\ \sin(x)y^2 \end{pmatrix}$

(ii) Seien K das Vektorfeld mit $K = \nabla f$ und γ die unten skizzierte Kurve in der (x, y)-Ebene von $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ bis $(3\pi, 2\pi)$:



Berechnen Sie die Arbeit $\int_\gamma K \cdot d\gamma$.

Antwort: $\int_\gamma K \cdot d\gamma =$ __________________________

b) Welche der folgenden Vektorfelder $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ hat eine Potentialfunktion?

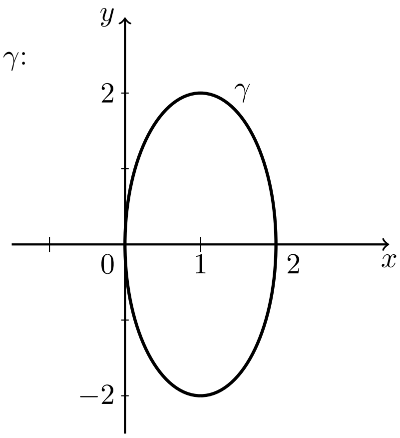
○ **(A)** $K(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2y \\ 3xy^2 \end{pmatrix}$

○ **(B)** $K(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2y \\ x^3 \end{pmatrix}$

○ **(C)** $K(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2y \\ 6xy \end{pmatrix}$

○ **(D)** $K(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2y \\ 3x^2y \end{pmatrix}$

c) Gegeben sei die folgende Kurve γ:

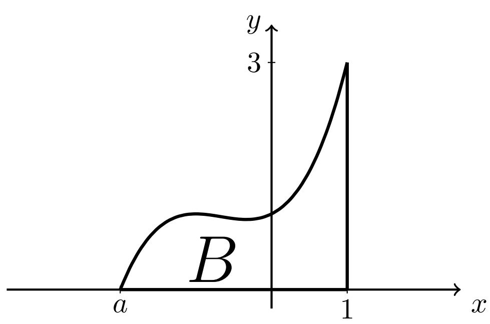


Welche ist eine Parametrisierung $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \gamma(t)$ von γ? Die Durchlaufrichtung können Sie dabei ignorieren.

Hinweis: Setzen Sie für t geeignete Werte ein, um drei Parametrisierungen auszuschliessen.

- ○ **(A)** $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) + 1 \\ 2\cos(t) \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$
- ○ **(B)** $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(t) + 1 \\ \sin(t) \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$
- ○ **(C)** $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) - 1 \\ 2\sin(t) \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$
- ○ **(D)** $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2\sin(t) - 1 \\ \cos(t) \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$

d) Gegeben sei das Vektorfeld K mit $K(x, y) = \begin{pmatrix} x^2y^2 - \cos(y) \\ xe^{x^2} - \frac{2}{3}xy^3 + y \end{pmatrix}$. Sei B das Gebiet, welches durch die Geraden $y = 0$, $x = 1$ und den Graphen des Polynoms $p(x) = \frac{1}{2}(x + 2)(x^2 + 1)$ begrenzt wird:



(i) Bestimmen Sie a.

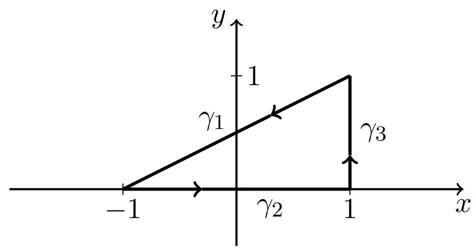
Antwort: $a =$ ____________

(ii) Berechnen Sie das Integral $\iint_B \operatorname{div}(K)(x, y)\, dA$.

Bearbeiten Sie Ihre Antwort auf einem separatem Blatt. Zwischenschritte werden bewertet.

Siehe nächstes Blatt!

e) Seien $b \in \mathbb{R}$ und K das Vektorfeld mit $K(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 2xy \\ -y^3 + b \cdot x^2 \end{pmatrix}$. Sei $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ die Kurve in der (x,y)-Ebene wie folgt zusammengesetzt aus γ_1, γ_2, und γ_3:



Bestimmen Sie b so, dass das Kurvenintegral von K entlang γ gleich 1 ist, das heisst:

$$\oint_\gamma K \cdot d\gamma = 1.$$

Bearbeiten Sie Ihre Antwort auf einem separatem Blatt. Zwischenschritte werden bewertet.