Prof. Dr. E. W. Farkas **ETH Zürich, Januar 2020**

D-BIOL, D-CHAB, D-HEST

Klausur zur Vorlesung Mathematik I/II – Musterlösung

---

1. (a) (*1 Punkt*)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4e^{-5x}+2e^{-x}+3x^2+3}{3e^{-5x}+2e^{-4x}+4x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+3}{4x^2+1} = \frac{3}{4}$$

(b) (*1.5 Punkte*)

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln^2(x)}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to 1} \frac{2\ln(x)}{x(2x-2)} = \lim_{x\to 1} \frac{2\ln(x)}{(2x^2-2x)} = \lim_{x\to 1} \frac{2}{4x^2-2x} = \frac{2}{2} = 1$$

(c) (*1.5 Punkte*)

$$3x^3-9x^2-3x+9 = 3(x-3)(x-1)(x+1) \Longrightarrow\ x_1=3,\ x_2=1,\ x_3=-1$$

(d) (*1.5 Punkte*)

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}} = e^{(\frac{1}{x}\ln(x))} \Longrightarrow f'(x) = -x^{(\frac{1}{x}-2)}(\ln(x)-1)$$

(e) (*1.5 Punkte*)

$$\int_0^{\pi} x\sin(x)dx = [\sin(x)-x\cos(x)]_0^{\pi} = \pi$$

(f) (*1.5 Punkte*)

$$f(x) = (1-\pi)+\pi x+\frac{1}{2}(\pi-1)x^2+O(x^3) \Longrightarrow a_0 = 1-\pi,\ a_1=\pi,\ a_2=\frac{1}{2}(\pi-1)$$

(g) (*1.5 Punkte*)

$$\left|\frac{2+\sqrt{2}i}{(3+\sqrt{3}i)^2}\right| = \frac{\sqrt{6}}{12} = \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

(h) (*2 Punkte*)

$$\det(v_1\ v_2\ v_3\ v_4) = 3\lambda^2-9\lambda = 0$$

für $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 3$

2. (a) (*6 Punkte*)

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 1 \\ a & 0 & a-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 0 & a-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda)(a-\lambda) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = a$$

Es gilt für den Rang der Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Folglich ist $Rang(A) = 2$ falls $a = 0$, ansonsten ist $Rang(A) = 3$.

Für den Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = -1$ berechnen wir die Lösungen des Gleichungssystems $(A + I)v = 0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & a+1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Folglich ist $x_1 = 0, x_3 = 0$ und $x_2 = t$ für alle $t \in \mathbb{R}$, also ist

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = -1$.

(b) (*6 Punkte*)

Wir benutzen hier das Gauss-Eliminationsverfahren:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Weiter gilt:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Folglich erhalten wir $z = 3$ aus der letzten Zeile, und aus den anderen Zeilen $y = 3 - 2 = 1$, $x = 2 - 3 + 1 = 0$ und $w = -2 \cdot 1 = -2$.

(c) (*5 Punkte= (i) 2 Punkte + (ii) 3 Punkte*)

(i) Wir berechnen die Determinante mithilfe von Unterdeterminanten:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 - 2a$$

(ii) Wir bezeichnen mit $(D|c)$ die erweiterte Koeffizientenmatrix.

- Für $a \neq \frac{1}{2}$ gilt $Rang(D) = Rang(D|c) = 3$. Dies deckt sich mit der Anzahl der Variablen, also gibt nur eine eindeutige Lösung.
- Bei $a = \frac{1}{2}$ gilt $Rang(D) = 2$, aber $Rang(D|c) = 3$, und somit ist hat das System keine Lösung.

3. (a) (*4 Punkte*)

Wir stellen die Gleichung um

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{1}{x(x+1)}$$

und erhalten durch Partialbruchzerlegung auf der rechten Seite

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

Wir integrieren auf beiden Seiten

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx$$

und wir erhalten

$$-\frac{1}{y} = \ln(x) - \ln(x+1) + c = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + c$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Umstellen führt zur Lösung

$$y = \frac{-1}{\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + c}$$

(b) (*6 Punkte*) Zunächst lösen wir das homogene Gleichungssystem

$$y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = 0.$$

Hierfür müssen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

ausrechnen. Es gilt

$$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \to \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3,$$

woraus die homogene Lösung

$$y_{\mathbf{hom}}(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

folgt. Für die inhomogene Gleichung betrachten wir den Ansatz

$$y_{\mathbf{inh}} = Ae^{-x}.$$

Einsetzen in die Ausgangsgleichung

$$y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = 12e^{-x}$$

ergibt

$$Ae^{-x} + 5Ae^{-x} + 6Ae^{-x} = 12e^{-x},$$

und folglich erhalten wir

$$12A = 12 \Rightarrow A = 1 \Rightarrow y_{\mathbf{inh}} = e^{-x}$$

Die allgemeine Lösung ist somit

$$y(x) = y_{\mathbf{hom}}(x) + y_{\mathbf{inh}}(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + e^{-x}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Für das Einsetzen der Anfangsbedingungen brauchen wir auch die Ableitung der allgemeinen Lösung

$$y'(x) = 2c_1 e^{2x} + 3c_2 e^{3x} - e^{-x}.$$

Einsetzen ergibt

$$\begin{cases} 0 = y(0) = c_1 + c_2 + 1 \\ -4 = y'(0) = 2c_1 + 3c_2 - 1. \end{cases} \tag{1}$$

Wir erhalten $c_1 = 0$ und folglich $c_2 = -1$.
Die Lösung der Differentialgleichung ist somit

$$y(x) = e^{-x} - e^{3x}.$$

(c) (*5 Punkte= (i) 3 Punkte + (ii) 2 Punkte*)

(i) Wir lösen zunächst die Differentialgleichung mit Hilfe der Trennung der Variablen

$$\int \frac{dN}{N^3} = t + c \Rightarrow \frac{1}{2N^2} = c - t \Rightarrow N(t) = \frac{1}{\sqrt{c-2t}}$$

Durch Einsetzen der Nebenbedingung erhalten wir

$$N(0) = 1 = \frac{1}{\sqrt{c}} \Rightarrow c = 1$$

und somit ist die Lösung unseres Anfagswertproblemes

$$N(t) = \frac{1}{\sqrt{1-2t}}.$$

(ii) Der Term im Nenner

$$\sqrt{1-2t}$$

ist nur definiert, falls $1 - 2t > 0$ ist. D.h., dass die Lösung nicht definiert ist für Zeiten grösser als $t \geq \frac{1}{2}$.

4. (a) (*4 Punkte*)

Zuerst berechnen wir z_0, indem wir $(1, 0)$ für (x, y) in die Gleichung einsetzen und erhalten

$$z_0 = e^0 - \sin(0) = 1.$$

Nun berechnen wir die Tangentialebene im Punkt $(1, 0, 1)$ aus, indem wir zunächst die partiellen Ableitungen der Funktion

$$z = f(x, y) = e^{2x^2 y} - \sin(xy)$$

ausrechnen:

$$f_x(x, y) = 4xye^{2x^2 y} - y\cos(xy), \quad f_y(x, y) = 2x^2 e^{2x^2 y} - x\cos(xy).$$

Einsetzen von $(1, 0)$ für (x, y) ergibt jeweils

$$f_x(1, 0) = 0, \quad f_y(1, 0) = 1.$$

Somit erhalten wir für die Tangentialebenengleichung

$$E(x, y) = z_0 + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \Rightarrow E(x, y) = 1 + y.$$

(b) (*4 Punkte*)

Als ersten Schritt setzen wir den Gradienten gleich Null und berechnen die kritischen Punkte

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 12y \\ 24y^2 - 12x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Durch Umstellen erhalten wir

$$\begin{cases} x^2 = 4y \\ 2y^2 = x \end{cases}$$

und folglich durch Einsetzen

$$4y^4 = 4y \Longleftrightarrow y(y^3 - 1) = 0.$$

Damit ist entweder $y = 0 (\Rightarrow x = 0)$ oder $y = 1 (\Rightarrow x = 2)$ und somit sind die kritischen Punkte

$$P_1 = (0,0), \quad P_2 = (2,1).$$

Durch wiederholtes Ableiten erhalten wir

$$f_{xx}(x,y) = 6x, \; f_{yy}(x,y) = 48y, \; f_{xy}(x,y) = \; f_{yx}(x,y) = -12.$$

Nun gilt

$$\Delta(x,y) = f_{xx}(x,y) f_{yy}(x,y) - (f_{xy}(x,y))^2 = 288xy - 144$$

Es gilt $\Delta(0,0) < 0$ und somit hat die Funktion in $(0,0)$ einen Sattelpunkt. Weiter haben wir

$$\Delta(2,1) = 288 \cdot 2 - 144 > 0$$

und

$$f_{xx} = 12 > 0.$$

Damit gilt, dass wir im Punkt $(2,1)$ ein Minimum haben.

(c) (*4 Punkte*)

Wir wenden den Satz der impliziten Funktionen auf die Funktion

$$F(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 24x + y^3$$

an, und erhalten

$$y'(x) = \frac{-\partial_x F(x,y)}{\partial_y F(x,y)} = \frac{-(x^2 - 10x + 24)}{3y^2}.$$

Horizontale Tangenten erhält man für $y'(x) = 0$, somit haben wir

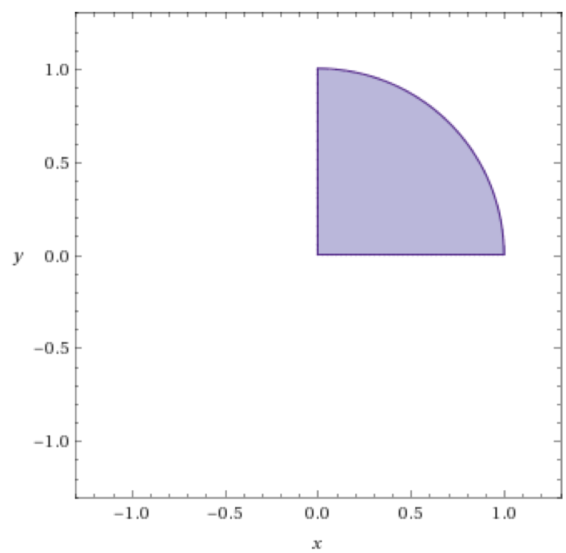
$$x^2 - 10x + 24 = 0 \Rightarrow x_1 = 4 \;\; x_2 = 6.$$

Setzen wir es ein in die Gleichung

$$\frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 24x + y^3 = 0$$

ein, dann erhalten wir die Punkte $(4, \sqrt[3]{-\frac{112}{3}})$ und $(6, \sqrt[3]{-36})$.

5. (a) (*4 Punkte*)



Wir benutzen Polarkoordinaten und erhalten

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^1 re^{r^2}drd\varphi = \frac{\pi}{2}\int_0^1 re^{r^2}dr = \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}e^{r^2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}(e-1).$$

(b) (*3 Punkte*)

$$\int_\pi^{2\pi}\int_{x^2}^{x^3}\sin\left(\frac{y}{x}\right)dydx = \int_\pi^{2\pi}[-x\cos(\frac{y}{x})]_{x^2}^{x^3}dx = \int_\pi^{2\pi}[-x\cos(x^2) + x\cos(x)]dx$$

und weiter

$$\int_\pi^{2\pi}[-x\cos(x^2)+x\cos(x)]dx = [-\frac{\sin(x^2)}{2}+x\sin(x)+\cos(x)]_\pi^{2\pi} = \frac{1}{2}(\sin(\pi^2)-\sin(4\pi^2))+2.$$

6. (a) (*3 Punkte*)

(i) Wir schreiben $z^5 = 1$ als $z^5 = e^{2\pi k i}$ und folglich bekommen wir fünf Lösungen der Form

$$z = e^{\frac{2\pi k}{5} i},\ k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Um im ersten Quadraten zu liegen, muss gelten

$$\frac{2\pi k}{5} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow k \leq \frac{5}{4},$$

somit kommen nur zwei Nullstellen in Frage.

(ii) Analog zu (i) schreiben wir die Ungleichung

$$\frac{2\pi k}{2020} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow k \leq 505,$$

also kommen 506 Nullstellen in Frage (wir müssen immer $k = 0$ mitbeachten).

(b) (*3 Punkte*) Wir schreiben geschickt die Gleichung um:

$$(z + z^*) + z \cdot z^* = 11 \Leftrightarrow 2\Re(z) + |z|^2 = 11$$

und setzten $|z| = 3$ ein:

$$2\Re(z) + 9 = 11 \Leftrightarrow \Re(z) = 1,$$

damit muss gelten:

$$z = 1 + ib,\ \text{für ein } b \in \mathbb{R}.$$

Wir müssen noch $|z| = 3$ berücksichtigen:

$$|z| = \sqrt{1 + b^2} = 3 \qquad \Rightarrow \qquad b = \pm\sqrt{8}.$$

Damit lauten die Lösungen der Gleichung $z_1 = 1 + 2\sqrt{2}i$ und $z_2 = 1 - 2\sqrt{2}i$.

(c) (*3 Punkte*) Wir können den Ausdruck folgendermassen umschreiben

$$i^i = (i)^i = (e^{i(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)})^i = e^{-(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)}$$

für jedes ganzzahlige k. Jedoch bedeutet dies, dass der Ausdruck von der Wahl von k abhängig ist. Dies führt dazu, dass ohne eine Einschränkung des Drehwinkels kein eindeutiges Ergebnis für i^i hingeschrieben werden kann.