Prof. Dr. E. W. Farkas **ETH Zürich, Januar 2020**

D–BIOL, D–CHAB, D–HEST

Klausur zur Vorlesung Mathematik I/II

Bitte ausfüllen!

Name:	
Vorname:	
Legi-Nr.:	

Bitte nicht ausfüllen!

Aufgabe	Punkte	Kontrolle	Max
1			12
2			17
3			15
4			12
5			4 + 3 (∗)
6			3 + 6 (∗)
Total			63

Die maximal erreichbare Punktzahl ist 63. In Aufgaben 5 und 6 gibt es mit (∗) markierte **Bonusteilaufgaben** mit insgesamt 9 **Zusatzpunkten**.

Bitte wenden!

Hinweise zur Klausur

Prüfungsdauer: 3 Stunden.

Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten mit persönlichen, von Hand geschriebenen Notizen. Keine (Taschen-)Rechner. Wörterbuch.

Bitte beachten Sie folgende Punkte:

- Tragen Sie **jetzt** Ihren Namen in das Deckblatt ein und geben Sie es **am Ende** der Prüfung als vorderstes Blatt Ihrer Arbeit ab.
- Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- Begründen Sie Ihre Lösungen. Dabei können bekannte Formeln aus der Vorlesung und den Übungen ohne Herleitung verwendet werden.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift, rotem oder grünem Kugelschreiber.
- Die Reihenfolge der Bearbeitung der Aufgaben ist Ihnen freigestellt.
- Wir erwarten nicht, dass Sie alle Aufgaben lösen. Tun Sie einfach Ihr Bestes! Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet.
- **Am Ende der Prüfung**
  1. Ordnen Sie Ihre zusätzlichen Lösungsblätter nach Aufgaben.
  2. Legen Sie diese zusammen mit Ihrer Prüfung an oberster Stelle in den bereitliegenden Umschlag. Dieser wird am Ende eingesammelt. Bitte beschriften oder verschliessen Sie den Umschlag **nicht**.

Viel Erfolg!

Siehe nächstes Blatt!

Aufgaben

---

1. (*12 Punkte*) Die Antworten in Teilaufgaben **1.a)** bis **1.h)** müssen Sie **nicht** begründen. Schreiben Sie die Antworten zu diesen Teilaufgaben **vollständig gekürzt und vereinfacht** direkt auf das Aufgabenblatt. Antworten zu diesen Teilaufgaben auf anderen Blättern werden nicht bewertet.

a) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4e^{-5x} + 2e^{-x} + 3x^2 + 3}{3e^{-5x} + 2e^{-4x} + 4x^2 + 1} = \underline{\qquad\qquad}.$$

b) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln^2(x) - 1}{2x^2 - 1} = \underline{\qquad\qquad}.$$

c) Geben Sie alle Nullstellen von $3x^3 - 9x^2 - 3x + 9$ an: $\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$.

d) Sei f die Funktion mit $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ und $x > 0$. Bestimmen Sie die Ableitung

$$f'(x) = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}.$$

e) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^{\pi} x \sin(x)\, dx = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}.$$

f) Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ die Taylorreihe der Funktion

$$f(x) = \pi \sin(x) + (1 - \pi)\cos(x)$$

(im Punkt $x_0 = 0$). Bestimmen Sie $a_0 = \underline{\qquad\quad}$; $a_1 = \underline{\qquad\quad}$; $a_2 = \underline{\qquad\quad}$.

g) Gegeben seien die komplexen Zahlen $z_1 = 2 + \sqrt{2}i$ und $z_2 = 3 + \sqrt{3}i$.

$$|z_1 \cdot z_2^{-2}| = \underline{\qquad\qquad}.$$

h) Gegeben sind folgende Vektoren:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ \lambda \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ \lambda \end{pmatrix}, \ v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

Für welche Werte von $\lambda \in \mathbb{R}$ sind diese Vektoren linear abhängig?

$\lambda_1 = \underline{\qquad\quad}$, $\lambda_2 = \underline{\qquad\quad}$

Bitte wenden!

2. (*17 Punkte*) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und den Rang von A in Abhängigkeit von a. Geben Sie für den Eigenwert $\lambda = -1$ einen zugehörigen Eigenvektor an.

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems

$$\begin{cases} w \qquad\quad + 2y = 0 \\ 2w - x + 2y + z = 1 \\ w + \quad y + z = 2 \\ w - 2x + z = 1 \end{cases}$$

für die Variablen w, x, y und z.

(c) Gegeben sei die Matrix

$$D = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

und der Vektor

$$c = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix},$$

mit $a \in \mathbb{R}$.

(i) Berechnen Sie die Determinante von D in Abhängigkeit von a.

(ii) Für welche Werte von a hat das Gleichungssystem

$$Dx = c$$

- genau eine Lösung?
- keine Lösung?

3. (*15 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie für $x > 0$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung 1. Ordnung

$$x(x+1)y'(x) = y^2(x), \tag{1}$$

mithilfe der Trennung der Variablen.

(b) Man bestimme die Lösung des Anfangswertproblems 2. Ordnung

$$\begin{cases} y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = 12e^{-x} \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = -4. \end{cases} \tag{2}$$

(c) In einem biologischen Modell wächst eine Bakterienpopulation gemäss der Differentialgleichung

$$N'(t) = (N(t))^3, \tag{3}$$

Die Grösse der Population zur Zeit $t = 0$ sei $N(0) = 1$.

(i) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems.

(ii) Erklären Sie kurz, wieso dieses Modell für grosse Zeiten t nicht realistisch ist. **Hinweis:** Überprüfen Sie, für welche $t > 0$ die Lösung des Anfangswertproblems existiert.

4. (*12 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie $z_0 \in \mathbb{R}$ so, dass der Punkt $(1, 0, z_0)$ auf der Fläche in $\mathbb{R}^3$, gegeben durch die Gleichung

$$z + \sin(xy) = e^{2x^2y}$$

liegt. Bestimmen Sie anschliessend die Gleichung der Tangentialebene an diese Fläche im Punkt P.

(b) Man bestimme die Extremwerte der Funktion

$$f(x, y) = x^3 - 12xy + 8y^3.$$

(c) Sei eine Kurve in $\mathbb{R}^2$ gegeben durch die Gleichung

$$\frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 24x + y^3 = 0.$$

In welchen Punkten (x, y) besitzt diese Kurve horizontale Tangenten?

5. (*4 Punkte + 3 Zusatzpunkte*)

(a) Sei $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1 \text{ und } x, y \geq 0\}$. Skizzieren Sie die Fläche A in einem Koordinatensystem. Bestimmen Sie

$$\iint_A e^{x^2+y^2} \, dxdy.$$

Hinweis: Verwenden Sie Polarkoordinaten.

Bitte wenden!

(b) **(∗)** Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\int_{\pi}^{2\pi} \int_{y=x^2}^{y=x^3} \sin\left(\frac{y}{x}\right) dydx$$

6. (*3 Punkte + 6 Zusatzpunkte*)

(a) Geben Sie mit einer kurzen Begründung die Anzahl der komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) \geq 0$ und $\mathrm{Im}(z) \geq 0$ an, für die gilt:

(i)

$$z^5 = 1.$$

(ii)

$$z^{2020} = 1.$$

(b) **(∗)** Geben Sie alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ an, für die gilt:

$$\begin{cases} z + z^* + z \cdot z^* = 11, \\ |z| = 3. \end{cases}$$

(c) **(∗)** Stellen Sie sich vor, jemand fragt Sie, wie viel

$$i^i$$

ist. Erklären Sie kurz, wieso dieser Ausdruck nicht eindeutig definiert ist.