Lösung Mathematik I & II

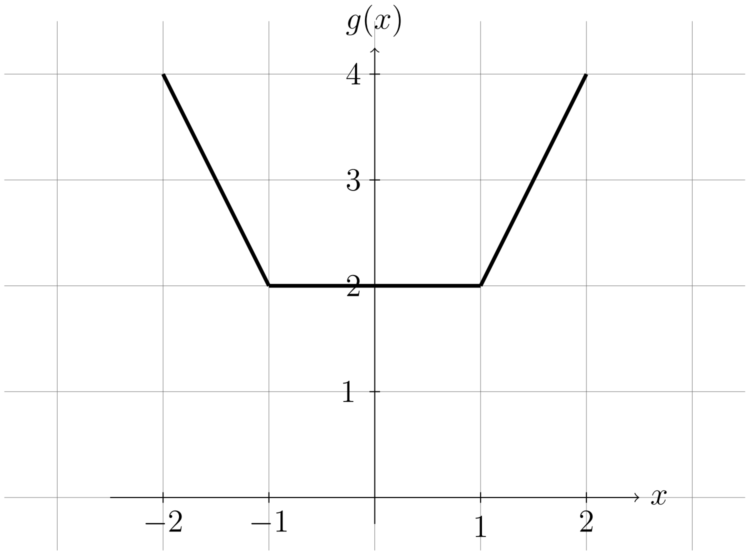
1. (*10 Punkte*)

(a) (i.) Es ist $f(x) = \ln(x^3) - \ln(9x) = 3\ln(x) - \ln(9) - \ln(x) = 2\ln(x) - \ln(9)$. Nun leiten wir ab und erhalten $f'(x) = \frac{2}{x}$.

(ii.) Da sowohl Nenner wie auch Zähler gegen Null konvergieren, können wir die Regel von L'Hospital anwenden. Die Ableitung des Zählers wurde in Aufgabenteil (i.) berechnet. Die Ableitung des Nenners ist 1. Damit ist:

$$\lim_{x\to 3} \frac{\ln(x^3) - \ln(9x)}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{2/x}{1} = \frac{2}{3}$$

(b) (i.) Gegeben sei die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = |x-1| + |x+1|$ mit Funktionsgraphen:



Geben Sie $b \in \mathbb{R},\ b > 0$ an, so dass $\int_{-2}^{b} g(x)dx = 7$ gilt.

Antwort:

$$b = 1.$$

Das Integral ist gleich dem Flächeninhalt unter der Graphen zwischen -2 und b. Dies ergibt sich dann z.B. durch Kästchen zählen.

(ii.) Sei ln der natürliche Logarithmus. Dann gibt es eine obere Integralgrenze $b > 0$ mit

$$\int_0^b \frac{e^x}{e^x + 2} dx = \ln(2).$$

Bestimmen Sie b.

Antwort: Durch Substitution $u(x) = e^x + 2$ und $du(x) = e^x dx$ berechnen wir

$$\int \frac{e^x}{e^x + 2} = \int \frac{1}{u}\, du = \ln(u) + c = \ln(e^x + 2) + c.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\int_0^b \frac{e^x}{e^x + 2} &= \Big[\ln(e^x + 2)\Big|_0^b = \ln\left(e^b + 2\right) - \ln\left(e^0 + 2\right)\\ &= \ln\left(e^b + 2\right) - \ln(3).\end{aligned}$$

Dies setzen wir nun gleich $\ln(2)$ und somit $\ln\left(e^b + 2\right) - \ln(3) = \ln(2)$ und indem wir die Exponential-Funktion anwenden $\frac{e^b+2}{3} = 2$. Nun erhalten wir nun

$$e^b = 4 \iff b = \ln(4).$$

(c) Gegeben sei die Funktion $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $k(x) = e^{x^2}$.
Im 5. Taylor-Polynom $T_5(x) = 1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \frac{1}{2}x^4 + a_5x^5$ von k an der Stelle $x_0 = 0$ geben wir zwei Koeffizienten an.
Bestimmen Sie die fehlenden Koeffizienten a_1, a_2, a_3 und a_5:

Antwort: Da die Funktion k gerade ist, müssen die Koeffizienten a_1, a_3 und a_5 null sein.
Um a_2 anzugeben, berechnen wir zuerst die zweite Ableitung von k. Diese ist

$$k''(x) = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2}.$$

Damit ist dann $a_2 = \frac{1}{2}k''(0) = 1$.

(d) Gegeben sei die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = x^2e^{3(x-1)}$.

(i.) Die Funktion h besitzt zwei Fixpunkte $\widetilde{x}_1$ und $\widetilde{x}_2$. Bestimmen Sie diese.

Antwort:

$$\widetilde{x}_1 = 0 \qquad\qquad \widetilde{x}_2 = 1$$

(ii.) Sei $(x_n)_{n\geq 0}$ eine Folge mit h als Reproduktionsfunktion, also

$$x_{n+1} = h(x_n) \qquad \text{für alle } n = 0, 1, 2, 3 \ldots$$

Sei $\widetilde{x} = \widetilde{x}_1$ oder $\widetilde{x} = \widetilde{x}_2$ einer der beiden Fixpunkte aus (i.).
Wir nennen den Fixpunkt $\widetilde{x}$ "attraktiv", wenn folgende Bedingung erfüllt ist:
Für jeden Startwert x_0 in der Nähe von $\widetilde{x}$ mit $x_0 \neq \widetilde{x}$ gilt $\widetilde{x} = \lim_{n\to\infty} x_n$.
Prüfen Sie jeweils, ob $\widetilde{x}_1$ oder $\widetilde{x}_2$ attraktiv ist.

Antwort: Wir berechnen zuerst die Ableitung

$$h'(x) = 2xe^{3(x-1)} + 3x^2e^{3(x-1)}.$$

Nun sehen wir

$$|h'(0)| = 0 \qquad \text{und} |h'(1)| = 5 > 1.$$

Damit ist der Fixpunkt $\widetilde{x}_1 = 0$ attraktiv, und der Fixpunkt $\widetilde{x}_2 = 1$ abstossend.

2. (*14 Punkte*)

(a) Gegeben sei die komplexe Zahl $z_1 = \dfrac{8}{i+1}$. Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil.

Antwort:

$$\mathrm{Re}(z_1) = 4 \qquad \mathrm{Im}(z_1) = -4$$

(b) Gegeben sei das Produkt $z_2 = i \cdot (-\sqrt{3} + i)^2$ komplexer Zahlen.

(i.) Bestimmen Sie die Polardarstellung $z_2 = r \cdot e^{i\varphi}$ mit $-\pi < \varphi \leq \pi$.

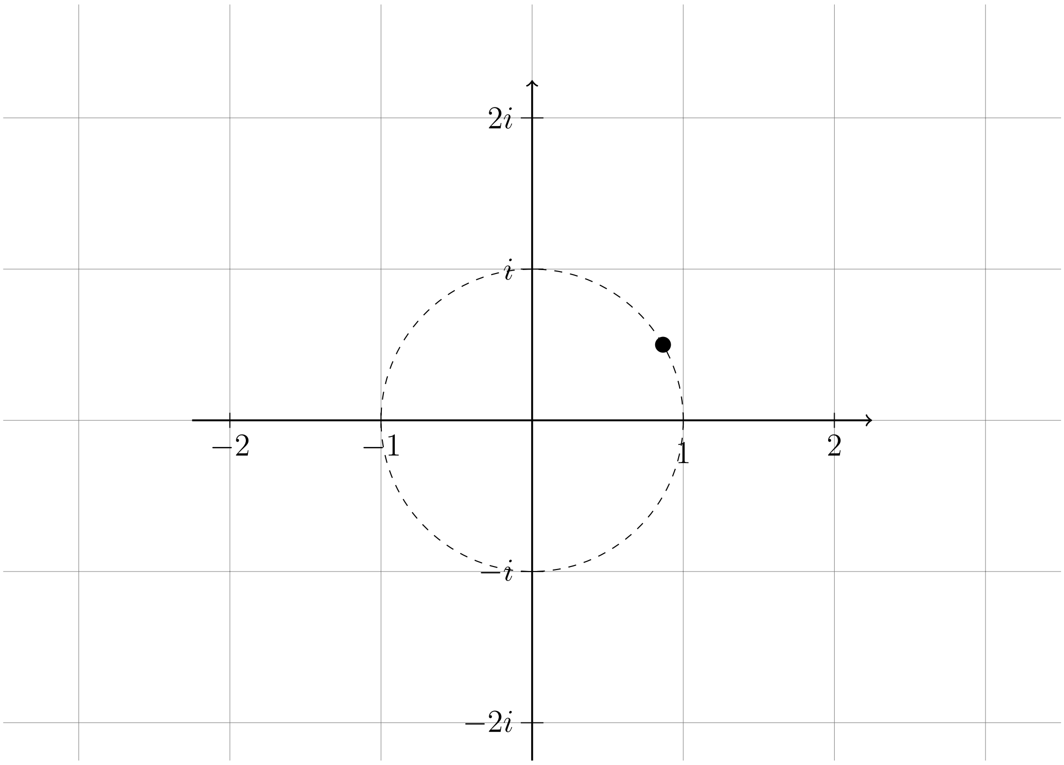
Antwort: Es ist

$$(-\sqrt{3} + i)^2 = 4\left(\cos\left(-\frac{1}{3}\pi\right) + i \sin\left(-\frac{1}{3}\pi\right)\right) \text{ (war in der Sommerprüfung)}$$

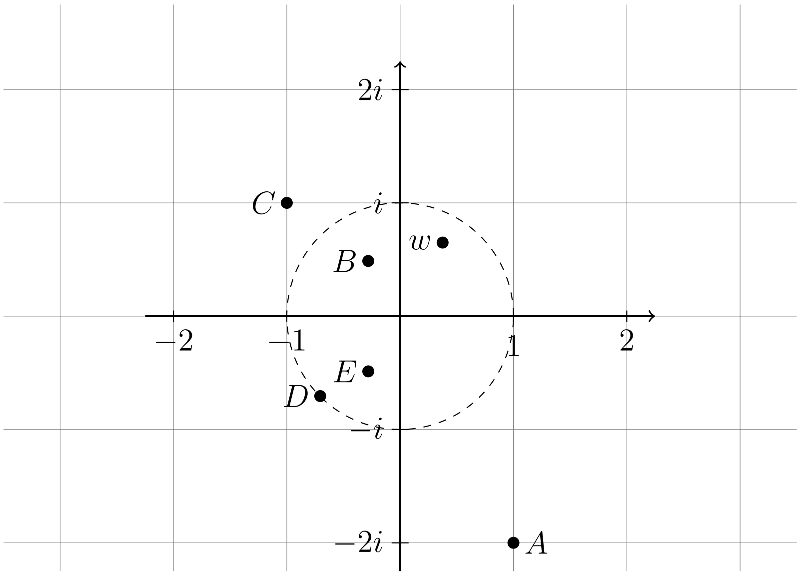
Da die Multiplikation mit i die Drehung um den Winkel $\frac{\pi}{2}$ gegen die Uhr ist, folgt

$$r = 4 \qquad \text{und} \qquad \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

(ii.) Zeichnen Sie $\dfrac{z_2}{|z_2|}$ in die komplexe Zahlenebene unten.



(c) Betrachten Sie die Zahlen A bis E und w in der komplexen Zahlenebene:



Welcher Buchstabe A bis E entspricht der komplexen Zahl $\overline{w}^2$?

Antwort: Durch Ausschluss ergibt sich

$$\overline{w}^2 = E$$

(d) Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(i.) Ein Eigenwert von A ist die komplexe Zahl $\lambda_1 = i$. Berechnen Sie die beiden weiteren Eigenwerte.

Antwort:

$$\lambda_2 = -i \qquad\qquad \lambda_3 = 1$$

Da A reelle Einträge hat, ist $\lambda_2 = -i = \overline{\lambda}_1$. Der dritte EW folgt mit einer schnellen Rechnung.

(ii.) Bestimmen Sie die Einträge x und z so, dass der Vektor $\begin{pmatrix} x \\ 8 \\ z \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A ist.

Antwort: Aus $A \begin{pmatrix} x \\ 8 \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ 8 \\ z \end{pmatrix}$ ergibt sich

$$x = 0 \qquad\qquad z = 0$$

(iii.) Die Matrix A definiert eine Entwicklung $v_{n+1} = A \cdot v_n$ für $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$.
Diese Entwicklung ist periodisch, das heisst: Es gibt $k > 0$ mit $v_{n+k} = v_n$.

Bestimmen Sie k und damit den Vektor v_{17} für den Startvektor $v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Antwort:
Die EW sind 4-te Einheitswurzeln, das heisst für $k = 4$ gilt $1^k = 1$, $i^k = 1$ und $(-i)^k = 1$, damit muss $E_3 = A^4$ sein. Alternativ lässt ist A^4 auch direkt ausrechnen. Damit ist $E_3 = A^4 = A^8 = A^{12} = A^{16} = \ldots$. Es folgt, dass

$$v_{17} = A^{17} \cdot v_0 = A \cdot A^{16} \cdot v_0 = A \cdot E_3 \cdot v_0 = A \cdot v_0.$$

Bleibt die Rechnung $A \cdot v_0$ mit $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(e) Gegeben sei die Matrix $D_b = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & b \end{pmatrix}$ mit $b \in \mathbb{R}$.

(i.) Berechnen Sie die Determinante von D_b in Abhängigkeit von b.

Antwort: Ausrechnen mit Sarrus oder Laplace ergibt

$$\det(D_b) = 2b + 4$$

(ii.) Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$D_b \cdot x = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ z \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie b und z so, dass für diese Einträge sowohl $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ als auch $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Lösung $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ des Gleichungssystems ist.

Antwort: Damit das Gleichungssystem mehr als eine Lösung haben kann muss die Determinante Null sein. Daraus folgt schonmal

$$b = -2.$$

Nun ist

$$D_{-2} \cdot x = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

und

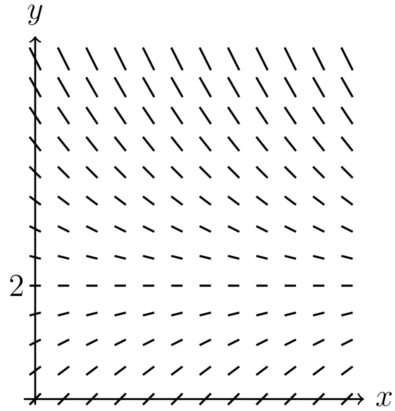
$$D_{-2} \cdot x = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

also

$$z = -\frac{1}{2}.$$

3. (*14 Punkte*)

(a) Folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Richtungsfeldes einer Differentialgleichung.



(i.) Welche Differentialgleichung passt dazu?

Antwort: Im Richtungsfeld sehen wir $y_\infty = 2$ als stationäre Lösung mit $y'_\infty = 0$, also:

- ○ $y'(x) = \frac{1}{2} \cdot y(x) + 1.$
- ✗ $y'(x) = -\frac{1}{2} \cdot y(x) + 1.$
- ○ $y'(x) = y(x) + 1.$
- ○ $y'(x) = -y(x) - 1.$

(ii.) Welche allgemeine Lösung passt dazu?

Antwort: Entweder mit der Lösungsformel für lineare DGL mit konstanten Koeffizienten oder wieder mit der stationären Lösung ergibt sich:

- ○ $y(x) = C \cdot e^{\frac{1}{2}x} + 1.$
- ○ $y(x) = C \cdot e^{\frac{1}{2}x} + 2.$
- ○ $y(x) = C \cdot e^{-\frac{1}{2}x} - 2.$
- ✗ $y(x) = C \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + 2.$

(b) Gegeben sei die Differentialgleichung $y'(x) = (y(x) + 3)(5 - y(x))$.

Geben Sie zwei Startwerte $y_1 \neq y_2$ an, für die jeweils die Lösungskurve streng monoton wachsend ist:

Antwort: Die rechte Seite ist eine nach unten geöffnete Parabel mit Nullstellen -3 und 5. Sie ist > 0 für alle $y_1 \neq y_2$ in dem Intervall $]-3, 5[$.

(c) Wir betrachten die folgende Differentialgleichung:

$$y'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} y^2(x).$$

(i.) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung durch Trennung der Variablen.

Antwort: Um die Variablen zu trennen schreiben wir zunächst

$$\frac{y'}{y^2} = \frac{2x}{x^2+1}.$$

womit wir dann

$$\frac{y'(x)}{y(x)^2} = \ln(x^2+1)'$$

erhalten. Nun integrieren wir beide Seiten bezüglich der dort auftretenden Variablen,

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int d\ln(x^2+1) + C$$

und erhalten sodann

$$-\frac{1}{y} = \ln(x^2+1) + C.$$

Durch Auflösen nach y ergibt sich folglich

$$y(x) = -\frac{1}{\ln(x^2+1)+C}.$$

(ii.) Bestimmen Sie die Lösung zum Anfangswert $y(0) = 1$.

Antwort: Um C zu bestimmen nutzen wir die Lösung aus dem vorherigen Aufgabenteil und den Anfangswert.

$$y(0) = 1 = -\frac{1}{\ln(1)+C} = -\frac{1}{C}.$$

Also ist $C = -1$. Die Lösungsfunktion ist somit

$$y(x) = -\frac{1}{\ln(x^2+1)-1}.$$

(iii.) Bestimmen Sie für die Lösung zum Anfangswert $y(0) = 1$ den Wert $\dfrac{y(-2)}{y(2)}$.

Antwort: Die Lösungsfunktion ist gerade, also

$$\frac{y(-2)}{y(2)} = 1$$

(d) Gegeben sei die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = 0.$$

(i.) Geben Sie die allgemeine Lösung $x \mapsto y(x)$ an.

Antwort: Mit der Lösungsformel für eine doppelte Nullstelle folgt

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$$

(ii.) Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ definiere das System $y'(x) = A \cdot y(x)$.

Bestimmen Sie mit Hilfe von Teil (i.) die Lösung des Systems, die in $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ startet.

Antwort: Da $a_{21} \neq 0$, können wir das System auf eine DGL 2. Ordnung zurückführen und diese zur Lösung des ursprünglichen Systems nutzen. Wir beginnen mit dem Ansatz

$$y_2'' - (a_{11} + a_{22})y_2' + \det(A)y_2 = 0.$$

Durch Einsetzen der Matrix A ergibt dies für y_2 genau die DGL aus (i.), für die wir bereits die allgemeine Lösung errechnet haben. Aus dem DGL system ergibt sich, dass

$$\begin{aligned} y_1 &= -2y_2 + y_2' \\ &= -2\big(C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}\big) + 2C_1 e^{2x} + C_2 e^{2x} + 2C_2 x e^{2x} \\ &= C_2 e^{2x} \end{aligned}$$

Alternativ wissen wir mit der ersten Gleichung, dass $y_1' = 2y_1$. Diese DGL hat die als allgemeine Lösung $y_1 = C_2 e^{2x}$.
Die allgemeine Lösung für das System ergibt sich damit als

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_2 e^{2x} \\ C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} e^{2x},$$

und durch Einsetzen des Anfangswerts erhalten wir $C_1 = 0$ und $C_2 = 1$.

4. (*10 Punkte*)

(a) Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = -\frac{1}{3}x^3 - 2xy + 8x + y^2$.

(i.) Die Funktion f hat zwei kritische Punkte. Bestimmen Sie diese.

Antwort: Nullsetzen der partiellen Ableitungen liefert

$$(x_1, y_1) = (-4, -4) \qquad\qquad (x_2, y_2) = (2, 2)$$

(ii.) Betrachten Sie den Punkt $(x_0, y_0) = (0, -1)$ in $\mathbb{R}^2$. Geben Sie a, b und c so an, dass

$$l(x, y) = c + ax + b(y + 1)$$

die Tangentialebene von f in $(0, -1, f(0, -1))$ beschreibt.

Antwort: Mit der Lösungsformel folgt

$$a = 10 \qquad\qquad b = -2 \qquad\qquad c = 1$$

(b) Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $g(x, y) = y^2 + x^3 + y^2 x - 9$.

(i.) Für welche $y \in \mathbb{R}$ liegt $(0, y)$ auf der Niveaukurve der Funktion g zur Höhe 7?

Antwort: Einsetzen des Punkte gibt die Gleichung $y^2 = 16$, also

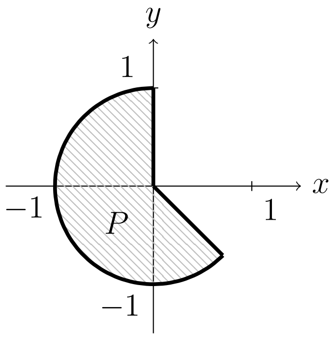
$$-4, 4$$

(ii.) Sei C die Niveaukurve der Funktion g zur Höhe 0.
Bestimmen Sie die Steigung der Tangente an diese Kurve im Punkt $(1, -2)$:

Antwort: Mit Implizier Differentiation ist die Lösung

$$\frac{7}{8}$$

(c) Folgendes Gebiet P wird berandet von einer Kreislinie und zwei Geradenstücken:



(i.) Vervollständigen Sie die Beschreibung von P in Polarkoordinaten

$$P = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x, y) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \text{ mit } r \in [0, 1],\ \varphi \in \left[\frac{1}{2}\pi, \frac{7}{4}\pi\right] \right\}.$$

(ii.) Berechnen Sie

$$\iint_P (1 + x^2 + y^2)\, dA.$$

Antwort:

$$\begin{aligned}
\iint_P 1 + x^2 + y^2 \, dA &= \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{7}{4}\pi} \int_0^1 \big(1 + r^2 \cos^2(\varphi) + r^2 \sin^2(\varphi)\big) r \, dr \, d\varphi \\
&= \left(\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{7}{4}\pi} 1 \, d\varphi \right) \left(\int_0^1 r + r^3 \, dr \right) \\
&= \frac{5}{4}\pi \left[\frac{1}{2} r^2 + \frac{1}{4} r^4 \right|_0^1 \\
&= \frac{15}{16}\pi
\end{aligned}$$

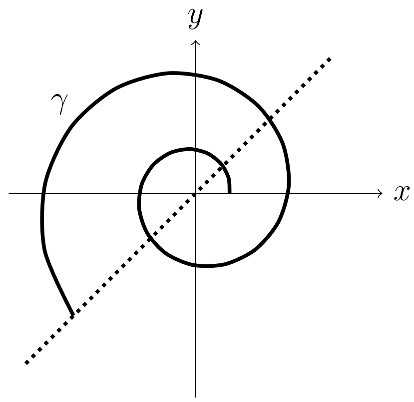
5. (*12 Punkte*)

(a) Sei $\gamma(t) = \big(e^t \cos(t), e^t \sin(t)\big)$ für $t \in \mathbb{R}$ gegeben.

(i.) Bestimmen Sie b so, dass mit dem Intervall $I = [0, b]$ für

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \gamma(t)$$

die unten abgebildete Kurve entsteht. Die gepunktete Gerade ist die Winkelhalbierende.



Antwort: Durch Zählen der Umläufe folgt

$$b = \frac{13}{4}\pi$$

(ii.) Wir betrachten das Kurvenstück für $t \in [0, \ln(2)]$ und das Vektorfeld K mit $K(x, y) = (-y, x)$. Berechnen Sie das Arbeitsintegral

$$\int_\gamma K \cdot d\gamma.$$

Antwort: Wir berechnen zunächst

$$\gamma'(t) = \big(e^t(\cos(t) - \sin(t)), e^t(\sin(t) + \cos(t))\big)\,.$$

Damit berechnen wir das Arbeitsintegral wie folgt:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\ln(2)} (-e^t \sin(t), e^t \cos(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt \\
&\quad = \int_0^{\ln(2)} e^{2t} \big(\cos(t)\sin(t) - \cos(t)\sin(t) + \sin^2(t) + \cos^2(t)\big)\; dt \\
&\quad = \int_0^{\ln(2)} e^{2t}\, dt = \Big[\frac{1}{2} e^{2t}\Big|_0^{\ln(2)} = \frac{1}{2}(4-1) = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

(b) Welches der folgenden Vektorfelder $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto K(x, y)$ ist konservativ?

Antwort: Mit dem Kriterium für konservativ $Q_x = P_y$ folgt.

○ $K(x,y) = (x - ye^{2xy}, xe^{2xy})$.

○ $K(x,y) = (x + ye^{2xy}, 2xe^{2xy})$.

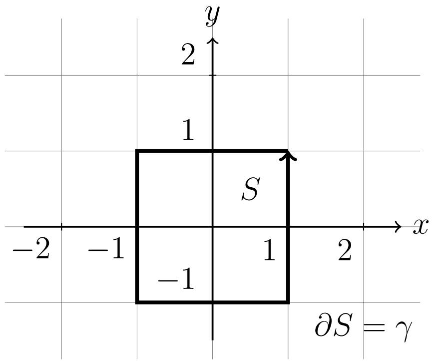
✗ $K(x,y) = (x + ye^{2xy}, xe^{2xy})$.

○ $K(x,y) = (x + ye^{2xy}, -xe^{2xy})$.

(c) Gegeben seien das Vektorfeld $K_b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ in Abhängigkeit von $b \in \mathbb{R}$ durch

$$K_b(x,y) = \big(8x + 2y + 4xy^2, -3b(y^3 + 3y)\big)$$

und das Quadrat



(i.) Finden Sie ein $b \in \mathbb{R}$, sodass der Fluss von innen nach aussen gleich 16 ist, das heisst

$$\oint_\gamma K_b \cdot n \, ds = 16.$$

Dabei ist n der äussere Normaleneinheitsvektor.

Antwort: Wir berechnen zuerst die Divergenz in Abhängigkeit von b, diese ist

$$\operatorname{div}(K_b) = 8 + 4y^2 - 9by^2 - 9b.$$

Nun ist nach dem Satz von Gauss

$$\oint_\gamma K_b \cdot n \, ds = \iint_S \operatorname{div}(K_b) \, dx \, dy = \iint_S (4 - 9b)y^2 \; + (8 - 9b) dx \, dy.$$

Wir suchen b so, dass $\operatorname{div}(K_b) = (4-9b)y^2 + (8-9b)$ konstant ist. Denn dann können wir diese Konstante vor das Gebietsintegral ziehen und erhalten das Produkt dieser Konstante mit den Flächeninhalt des Quadrats S. Es muss $(4 - 9b) = 0$ sein. Also $b = \frac{4}{9}$. Dann ist in der Tat

$$\oint_\gamma K_b \cdot n \, ds = 4 \iint_S 1 dx \, dy = 4 \cdot 4 = 16.$$

(ii.) Begründen Sie mit der Formel von Green, dass das Arbeitsintegral

$$\oint_\gamma K_b \cdot \, d\gamma$$

unabhängig von b ist, und berechnen Sie dieses Integral.

Antwort: Wir schreiben das Vektorfeld K_b in der Notation

$$K_b = (P, Q)$$

mit

$$P(x, y) = 8x + 2y + 4xy^2 \quad \text{und} \quad Q(x, y) = -3b(y^3 + 3y).$$

Laut der Formel von Green ist dann (mit der richtigen Orientierung)

$$\oint_\gamma K_b \cdot d\gamma = \iint_S (Q_x - P_y)\, dA = -\iint_S (2 + 8xy)\, dA,$$

und der rechte Ausdruck ist unabhängig von b. Nun zur Berechnung des rechten Integrals, dieses ist

$$\begin{aligned} -\iint_S (2 + 8xy)\, dA &= -\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} (2 + 8xy)\, dx\, dy \\ &= -2 \cdot 4 - 8 \int_{-1}^{1} x\, dx \int_{-1}^{1} y\, dy \\ &= -8 \end{aligned}$$

Da die letzten Integrale symmetrisch sind und damit Null.