D–BIOL D–CHAB D–HEST

Prüfung Mathematik I & II

401-0291-00L / 401-0292-00L

Nachname		**Vorname**		**Legi-Nummer**								**Prüfungsnr.**		
				X	X									

jeweils die ersten zwei Buchstaben — *letzte sechs Ziffern* — *Nicht ausfüllen*

Tragen Sie **jetzt die ersten zwei Buchstaben Ihres Nachnamens und Ihres Vornamens ein**, ebenso wie die **letzten sechs Ziffern Ihrer Legi-Nummer**. Wenn Sie separate Blätter beifügen, schreiben Sie diese, und **nur diese Informationen deutlich oben auf jedes Blatt**.

Prüfungsdauer: 3 Stunden.

Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten (nicht Blätter!) mit persönlichen, von Hand geschriebenen Notizen. Keine (Taschen-)Rechner. Ein Wörterbuch für fremdsprachige Studierende.

Bitte beachten Sie zunächst folgende Punkte:

- Schalten Sie Ihr **Handy aus** und legen Sie es weg - ebenso Ihre Smartwatch. **Sie dürfen während der Prüfung keine smarten Geräte - ausser Ihren Kopf - bei sich tragen.**
- Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch.
- Schreiben Sie **nicht** mit Bleistift und **nicht** mit roter oder grüner Farbe.
- Wir erwarten nicht, dass Sie alle Aufgaben lösen. Versuchen Sie einfach Ihr Bestes! Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet. Die Reihenfolge der Bearbeitung der Aufgaben ist Ihnen freigestellt.
- Beachten Sie die **Hinweise auf der Rückseite**.

Viel Erfolg!

Bitte nicht ausfüllen!

	1	2	3	4	5	Summe
Punkte						
Kontrolle						
Maximal	10	14	14	10	12	60

Hinweise zur Bearbeitung der Aufgaben

- Bearbeiten Sie die Aufgaben (wenn nicht anders angegeben) **direkt auf dem Prüfungsblatt**. Zwischenschritte werden nur dann bewertet, wenn es angegeben ist.
- Tragen Sie Ihre Lösung als Antwort auf die dafür vorgesehene Linie ein ("**Antwort:** __").

  Bei Single-Choice-Aufgaben kreuzen Sie Ihre Antwort an ("$\otimes$").
  Antworten oder Kreuze an anderen Stellen werden nicht bewertet.
- Die Single-Choice-Aufgaben haben alle das Format **1 aus 4**:

  Es ist **genau eine** Antwort korrekt. Für das korrekte Kreuz gibt es einen Punkt. Punktabzug bei falschen Antworten gibt es nicht.
- Es gibt **Teilaufgaben, die auf einem separaten Blatt** beantwortet werden. Nur bei diesen Teilaufgaben werden auch Zwischenschritte bewertet. Bei diesen Teilaufgaben gibt es einen entsprechenden Hinweis ("**Bearbeiten Sie die Aufgabe auf einem separaten Blatt. Zwischenschritte werden bewertet.**").
- Bei Aufgaben auf separatem Blatt: Begründen Sie Ihre Lösungen. Dabei können bekannte Formeln aus der Vorlesung und den Übungen ohne Herleitung verwendet werden.
- Vereinfachen Sie Ihre Lösungen weitestgehend.

Am Ende der Prüfung

1. Ordnen Sie Ihre zusätzlichen Lösungsblätter nach Aufgaben.
2. Stecken Sie diese zusammen mit Ihrer Prüfung zuoberst in den bereitliegenden Umschlag. **Verkleben Sie den Umschlag nicht.** Dieser wird am Ende eingesammelt.

Aufgaben

Blättern Sie erst beim Beginn der Prüfung um!

1. (*10 Punkte*)

(a) Sei ln der natürliche Logarithmus.

(i.) Seien $x > 0$ und $f(x) = \ln(x^3) - \ln(9x)$. Berechnen Sie $f'(x)$.

Antwort:

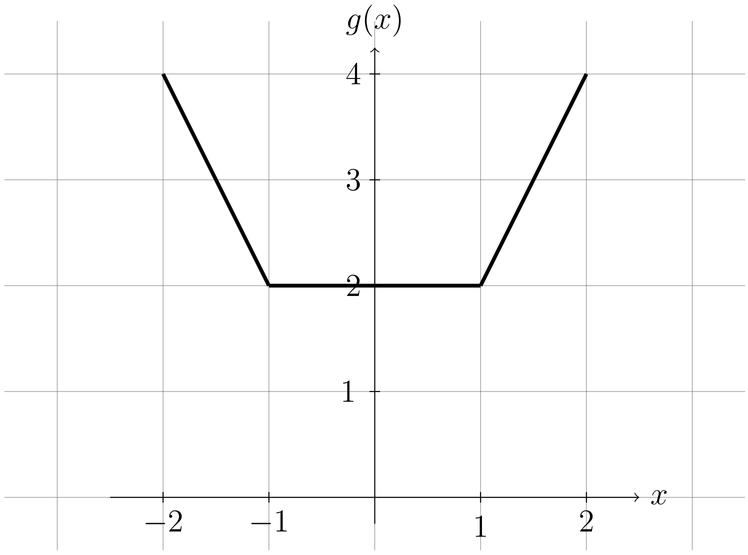
$$f'(x) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

(ii.) Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\ln(x^3) - \ln(9x)}{x-3}$.

Antwort:

$$\lim_{x\to 3} \frac{\ln(x^3) - \ln(9x)}{x-3} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

(b) (i.) Gegeben sei die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = |x-1| + |x+1|$ mit Funktionsgraphen:



Geben Sie $b \in \mathbb{R},\ b > 0$ an, so dass $\displaystyle\int_{-2}^{b} g(x)dx = 7$ gilt.

Antwort:

$$b = \_\_\_\_\_\_$$

(ii.) Sei ln der natürliche Logarithmus. Dann gibt es eine obere Integralgrenze $b > 0$ mit

$$\int_0^b \frac{e^x}{e^x + 2} dx = \ln(2).$$

Bestimmen Sie b.

Bearbeiten Sie die Aufgabe auf einem separaten Blatt. Zwischenschritte werden bewertet.

(c) Gegeben sei die Funktion $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $k(x) = e^{x^2}$.

Im 5. Taylor-Polynom $T_5(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \frac{1}{2} x^4 + a_5 x^5$ von k an der Stelle $x_0 = 0$ geben wir zwei Koeffizienten an.

Bestimmen Sie die fehlenden Koeffizienten a_1, a_2, a_3 und a_5:

Antwort:

$a_1 =$ _____ $a_2 =$ _____ $a_3 =$ _____ $a_5 =$ _____

(d) Gegeben sei die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = x^2 e^{3(x-1)}$.

(i.) Die Funktion h besitzt zwei Fixpunkte $\widetilde{x}_1$ und $\widetilde{x}_2$. Bestimmen Sie diese:

Antwort:

$\widetilde{x}_1 =$ ____________ $\widetilde{x}_2 =$ ____________

(ii.) Sei $(x_n)_{n \geq 0}$ eine Folge mit h als Reproduktionsfunktion, also

$$x_{n+1} = h(x_n) \qquad \text{für alle } n = 0, 1, 2, 3 \ldots$$

Sei $\widetilde{x} = \widetilde{x}_1$ oder $\widetilde{x} = \widetilde{x}_2$ einer der beiden Fixpunkte aus (i.).

Wir nennen den Fixpunkt $\widetilde{x}$ "attraktiv", wenn folgende Bedingung erfüllt ist:
Für jeden Startwert x_0 in der Nähe von $\widetilde{x}$ mit $x_0 \neq \widetilde{x}$ gilt $\widetilde{x} = \lim_{n \to \infty} x_n$.

Prüfen Sie jeweils, ob $\widetilde{x}_1$ oder $\widetilde{x}_2$ attraktiv ist.

Bearbeiten Sie die Aufgabe auf einem separaten Blatt. Zwischenschritte werden bewertet.

2. (*14 Punkte*)

(a) Gegeben sei die komplexe Zahl $z_1 = \dfrac{8}{i+1}$. Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil.

Antwort:

$\operatorname{Re}(z_1) =$ ____________ $\operatorname{Im}(z_1) =$ ____________

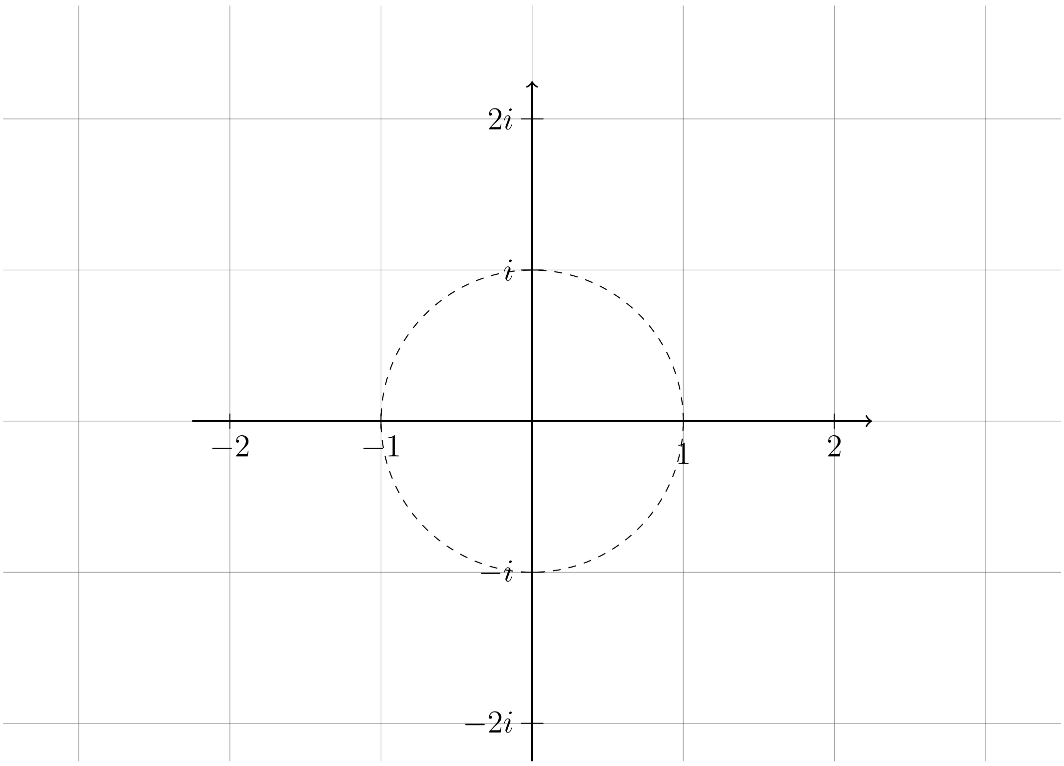
(b) Gegeben sei das Produkt $z_2 = i \cdot (-\sqrt{3} + i)^2$ komplexer Zahlen.

(i.) Bestimmen Sie die Polardarstellung $z_2 = r \cdot e^{i\varphi}$ mit $-\pi < \varphi \leq \pi$.

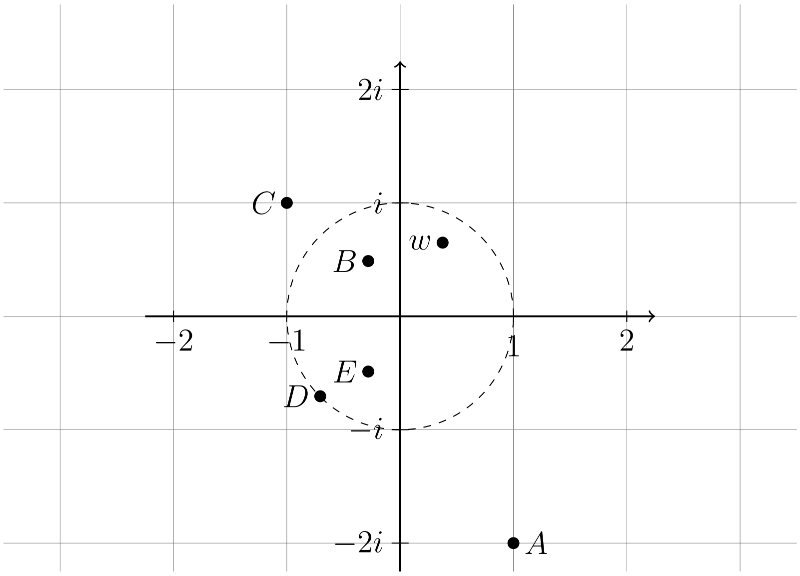
Antwort:

$r =$ ____________ $\varphi =$ ____________

(ii.) Zeichnen Sie $\dfrac{z_2}{|z_2|}$ in die komplexe Zahlenebene unten.



(c) Betrachten Sie die Zahlen A bis E und w in der komplexen Zahlenebene:



Welcher Buchstabe A bis E entspricht der komplexen Zahl $\overline{w}^2$?

Antwort:

$$\overline{w}^2 = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

(d) Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(i.) Ein Eigenwert von A ist die komplexe Zahl $\lambda_1 = i$. Berechnen Sie die beiden weiteren Eigenwerte.

Antwort:

$\lambda_2 = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$ $\lambda_3 = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

(ii.) Bestimmen Sie die Einträge x und z so, dass der Vektor $\begin{pmatrix} x \\ 8 \\ z \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A ist.

Antwort:

$x = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$ $z = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

(iii.) Die Matrix A definiert eine Entwicklung $v_{n+1} = A \cdot v_n$ für $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$.
Diese Entwicklung ist periodisch, das heisst: Es gibt $k > 0$ mit $v_{n+k} = v_n$.

Bestimmen Sie k und damit den Vektor v_{17} für den Startvektor $v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Bearbeiten Sie die Aufgabe auf einem separaten Blatt. Zwischenschritte werden bewertet.

(e) Gegeben sei die Matrix $D_b = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & b \end{pmatrix}$ mit $b \in \mathbb{R}$.

(i.) Berechnen Sie die Determinante von D_b in Abhängigkeit von b.

Antwort:

$$\det(D_b) = \underline{\hspace{3cm}}$$

(ii.) Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

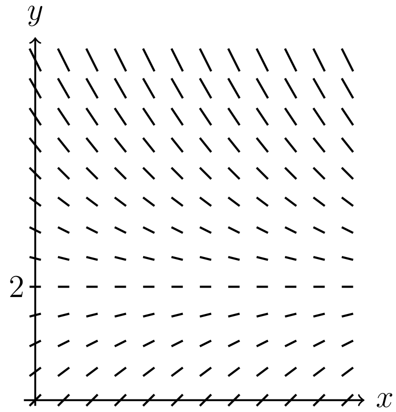
$$D_b \cdot x = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ z \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie b und z so, dass für diese Einträge sowohl $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ als auch $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Lösung $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ des Gleichungssystems ist.

Bearbeiten Sie die Aufgabe auf einem separaten Blatt. Zwischenschritte werden bewertet.

3. (*14 Punkte*)

(a) Folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Richtungsfeldes einer Differentialgleichung.



(i.) Welche Differentialgleichung passt dazu?

○ $y'(x) = \frac{1}{2} \cdot y(x) + 1.$ ○ $y'(x) = -\frac{1}{2} \cdot y(x) + 1.$

○ $y'(x) = y(x) + 1.$ ○ $y'(x) = -y(x) - 1.$

(ii.) Welche allgemeine Lösung passt dazu?

○ $y(x) = C \cdot e^{\frac{1}{2}x} + 1.$ ○ $y(x) = C \cdot e^{\frac{1}{2}x} + 2.$

○ $y(x) = C \cdot e^{-\frac{1}{2}x} - 2.$ ○ $y(x) = C \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + 2.$

(b) Gegeben sei die Differentialgleichung $y'(x) = (y(x) + 3)(5 - y(x))$.

Geben Sie zwei Startwerte $y_1 \neq y_2$ an, für die jeweils die Lösungskurve streng monoton wachsend ist:

Antwort:

$y_1 =$ ____________ $y_2 =$ ____________

(c) Wir betrachten die folgende Differentialgleichung:

$$y'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} y^2(x).$$

(i.) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung durch Trennung der Variablen.

Bearbeiten Sie die Aufgabe auf einem separaten Blatt. Zwischenschritte werden bewertet.

(ii.) Bestimmen Sie die Lösung zum Anfangswert $y(0) = 1$.

Bearbeiten Sie die Aufgabe auf einem separaten Blatt. Zwischenschritte werden bewertet.

(iii.) Bestimmen Sie für die Lösung zum Anfangswert $y(0) = 1$ den Wert $\dfrac{y(-2)}{y(2)}$.

Antwort:

$$\frac{y(-2)}{y(2)} = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

(d) Gegeben sei die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = 0.$$

(i.) Geben Sie die allgemeine Lösung $x \mapsto y(x)$ an.

Antwort:

$$y(x) = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

(ii.) Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ definiere das System $y'(x) = A \cdot y(x)$.

Bestimmen Sie mit Hilfe von Teil (i.) die Lösung des Systems, die in $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ startet.

Bearbeiten Sie die Aufgabe auf einem separaten Blatt. Zwischenschritte werden bewertet.

4. (*10 Punkte*)

(a) Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = -\frac{1}{3}x^3 - 2xy + 8x + y^2$.

(i.) Die Funktion f hat zwei kritische Punkte. Bestimmen Sie diese.

Antwort:

$(x_1, y_1) =$ ____________ $(x_2, y_2) =$ ____________

(ii.) Betrachten Sie den Punkt $(x_0, y_0) = (0, -1)$ in $\mathbb{R}^2$. Geben Sie a, b und c so an, dass

$$l(x, y) = c + ax + b(y + 1)$$

die Tangentialebene von f in $(0, -1, f(0, -1))$ beschreibt.

Antwort:

$a =$ __________ $b =$ __________ $c =$ __________

(b) Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $g(x, y) = y^2 + x^3 + y^2x - 9$.

(i.) Für welche $y \in \mathbb{R}$ liegt $(0, y)$ auf der Niveaukurve der Funktion g zur Höhe 7?

Antwort:

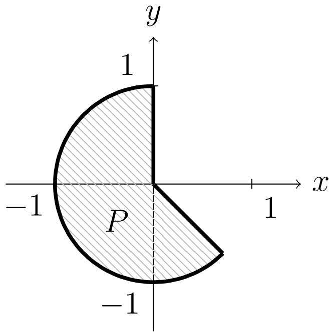
____

(ii.) Sei C die Niveaukurve der Funktion g zur Höhe 0.
Bestimmen Sie die Steigung der Tangente an diese Kurve im Punkt $(1, -2)$:

Antwort:

____

(c) Folgendes Gebiet P wird berandet von einer Kreislinie und zwei Geradenstücken:



(i.) Vervollständigen Sie die Beschreibung von P in Polarkoordinaten:

$$P = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x, y) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \text{ mit } r \in [0, 1],\ \varphi \in \left[\_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_\right] \right\}.$$

(ii.) Berechnen Sie

$$\iint_P (1 + x^2 + y^2)\, dA.$$

Bearbeiten Sie die Aufgabe auf einem separaten Blatt. Zwischenschritte werden bewertet.

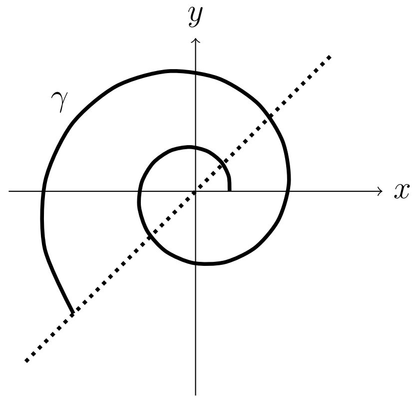
5. (*12 Punkte*)

(a) Sei $\gamma(t) = \big(e^t\cos(t), e^t\sin(t)\big)$ für $t \in \mathbb{R}$ gegeben.

(i.) Bestimmen Sie b so, dass mit dem Intervall $I = [0, b]$ für

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \gamma(t)$$

die unten abgebildete Kurve entsteht. Die gepunktete Gerade ist die Winkelhalbierende.



Antwort:

$b =$ ________

(ii.) Wir betrachten das Kurvenstück für $t \in [0, \ln(2)]$ und das Vektorfeld K mit $K(x, y) = (-y, x)$. Berechnen Sie das Arbeitsintegral

$$\int_\gamma K \cdot d\gamma.$$

Bearbeiten Sie die Aufgabe auf einem separaten Blatt. Zwischenschritte werden bewertet.

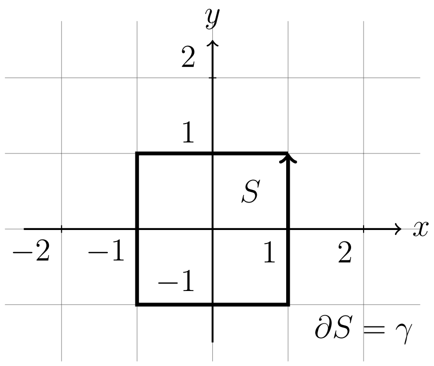
(b) Welches der folgenden Vektorfelder $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto K(x, y)$ ist konservativ?

- ◯ $K(x, y) = (x - ye^{2xy}, xe^{2xy})$.
- ◯ $K(x, y) = (x + ye^{2xy}, 2xe^{2xy})$.
- ◯ $K(x, y) = (x + ye^{2xy}, xe^{2xy})$.
- ◯ $K(x, y) = (x + ye^{2xy}, -xe^{2xy})$.

(c) Gegeben seien das Vektorfeld $K_b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ in Abhängigkeit von $b \in \mathbb{R}$ durch

$$K_b(x, y) = \big(8x + 2y + 4xy^2, -3b(y^3 + 3y)\big)$$

und das Quadrat



(i.) Finden Sie ein $b \in \mathbb{R}$, sodass der Fluss von innen nach aussen gleich 16 ist, das heisst

$$\oint_\gamma K_b \cdot n \, ds = 16.$$

Dabei ist n der äussere Normaleneinheitsvektor.

Bearbeiten Sie die Aufgabe auf einem separaten Blatt. Zwischenschritte werden bewertet.

(ii.) Begründen Sie mit der Formel von Green, dass das Arbeitsintegral

$$\oint_\gamma K_b \cdot d\gamma$$

unabhängig von b ist, und berechnen Sie dieses Integral.

Bearbeiten Sie die Aufgabe auf einem separaten Blatt. Zwischenschritte werden bewertet.