Aufgaben und Lösungsvorschlag

1. Aufgabe **[14 Punkte]**

Schreiben Sie die Lösungen **vollständig gekürzt und vereinfacht** in das jeweils vorgegebene Feld im Antwortheft. Sie brauchen **keine** Zwischenschritte oder Begründungen angeben. Antworten, die Sie woanders als in das vorgebenene Feld im Antwortheft hinschreiben, werden **nicht** gewertet.

(a) [**1 Punkt**] Sei a_n die Folge $\dfrac{28n^4 + 13n^3 + n^2 - 7n + 20}{2n^5 - 7n^2 + 5n - 1}$. Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Lösung:

0

(b) [**1 Punkt**] Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = \ln(x^{-2}) + x^{-2}$.

Lösung:

$-2(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3})$

(c) [**1 Punkt**] Berechnen Sie das Integral $\int_1^e f(x)\,dx$ der Funktion $f(x) = x\big(\ln(x) - \frac{1}{2}\big)$.

Lösung:

$1/2$

(d) [**1 Punkt**] Finden Sie die Partialbruchzerlegung von $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 3x + 2}$.

Lösung:

$$\frac{2}{x-2} - \frac{1}{x-1}$$

(e) [**1 Punkt**] Berechnen Sie das Integral $\int_{1/(2\pi)}^{1/\pi} f(x)\,dx$ der Funktion $f(x) = x^{-3}\cos(x^{-1})$.

Lösung:

2

(f) [**2 Punkte**] Finden Sie die beiden Zahlen $-\infty < r < s < \infty$ sodass die Funktion $f(x) = x^3 + 3x^2$ auf den Intervallen $(-\infty, r)$ und (s, ∞) monoton steigend ist und auf dem Intervall (r, s) monoton fallend.

Lösung:

$r = -2$
$s = 0$

(g) [**1 Punkt**] Betrachten Sie die Funktion $f(x) = x^3 + ax^2$ mit einem Parameter $a \in \mathbb{R}$. Finden Sie den Parameter $a \in \mathbb{R}$ sodass die Funktion f auf dem Intervall $(-\infty, -1)$ konkav und auf dem Intervall $(-1, \infty)$ konvex ist.

Lösung:

$a = 3$

(h) [**2 Punkte**] Geben Sie mit ja/nein an, ob die folgende Funktion im Punkt $x = 0$ oder im Punkt $x = \pi/2$ stetig ist.

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & \text{falls } x < 0 \\ \ln(x^{-1}\sin(x)) & \text{falls } 0 \leq x < \pi/2 \\ \ln(2/\pi) - 2x/\pi + 1 & \text{falls } x \geq \pi/2 \end{cases}$$

Hinweis: Es gilt $\lim_{x\to 0} x^{-1}\sin(x) = 1$.

Lösung:

$x = 0$: ja
$x = \pi/2$: ja

(i) [**1 Punkt**] Ist die Funktion aus der vorherigen Teilaufgabe im Punkt $x = \pi/2$ differenzierbar? (Antworten Sie mit "ja/nein".)

Lösung:

ja

(j) [**2 Punkte**] Bestimmen Sie den zweiten und dritten Koeffizienten (also a_1 und a_2) der Taylorreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-\pi)^n$ von $f(x) = x\cos(x)$ um den Punkt π.

Lösung:

$a_1 = -1$
$a_2 = \pi/2$

(k) [**1 Punkt**] Finden Sie die Zahl $s_0 \in (0, \infty)$ sodass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 s^{-n}$ für $s > s_0$ konvergiert.

Lösung:

$s_0 = 1$

2. Aufgabe **[9 Punkte]**

In dieser Aufgabe bezeichnet i die komplexe Einheit, also $i^2 = -1$, und $\bar{z}$ ist die komplex konjugierte Zahl von $z \in \mathbb{C}$. Schreiben Sie die Lösungen **vollständig gekürzt und vereinfacht** in das jeweils vorgegebene Feld im Antwortheft. Sie brauchen **keine** Zwischenschritte oder Begründungen angeben. Antworten, die Sie woanders als in das vorgebenene Feld im Antwortheft hinschreiben, werden **nicht** gewertet.

(a) [**3 Punkte**] Finden Sie die Lösung folgender Gleichungen. Geben Sie sie entweder in kartesischer Form oder in Polarform an.

(i) $z = \bar{z} + 2i$ und $\mathrm{Arg}(z) = 3\pi/4$
(ii) $\mathrm{Re}(iz) = 1$ und $\mathrm{Im}(z^2) = -4$
(iii) $z^3 = 27i$ und $\mathrm{Re}(z) < 0$

Lösung:

(i) $z = -1 + i$
(ii) $z = 2 - i$
(iii) $z = 3e^{i5\pi/6}$

(b) [**3 Punkte**] Geben Sie folgende Zahlen in kartesischer Form an.

(i) $z = e^{i\frac{3\pi}{4}}\mathrm{Im}\Big(\overline{i(3+i)}\Big) + \mathrm{Re}\Big(\dfrac{-5}{2+i}\Big)$

(ii) $z = \Big[\cos\Big(\dfrac{\pi}{20}\Big) - i\sin\Big(-\dfrac{\pi}{20}\Big)\Big]^{10}$

Hinweis: Bringen Sie die Zahl zuerst in Polarform.

(iii) $z = i\big(1 + \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\big) + \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

Lösung:

(i) $z = \frac{3\sqrt{2}-4}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i$
(ii) $z = i$
(iii) $z = 3i - 2$

(c) [**3 Punkte**] Betrachten Sie die Menge

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid 2\mathrm{Im}(z) \geq \mathrm{Re}(z)\}$$

in der komplexen Ebene. Seien $z_1 = \sqrt{8}e^{i\frac{7\pi}{4}}$ und $z_2 = e^{i\frac{\pi}{2}}$. Entscheiden Sie jeweils mit "ja/nein", ob die folgenden komplexen Zahlen in der Menge D liegen oder nicht.

(i) $z_1 + z_2$ (iii) $z_1 z_2$ (v) z_1/z_2

(ii) $\bar{z}_1 + z_2$ (iv) $\bar{z}_1 z_2$ (vi) $\bar{z}_1/z_2$

Lösung:

(i) nein	(iii) ja	(v) nein
(ii) ja	(iv) ja	(vi) nein

3. Aufgabe **[9 Punkte]**

Für die Teilaufgaben (a) und (b): Schreiben Sie die Lösungen in das vorgegebene Feld im Antwortheft. Sie brauchen **für (a) und (b) keine** Zwischenschritte oder Begründungen angeben. Antworten **zu (a) und (b)**, die Sie woanders als in das vorgebenene Feld im Antwortheft hinschreiben, werden **nicht** gewertet.

Betrachten Sie folgende Matrizen A und B sowie den Vektor b. Die Matrix A hängt von einem Parameter $\mu \in \mathbb{R}$ ab.

$$A = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 5 & -9 & -5 \\ 3 & -5 & -3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) **[1 Punkt]**
Berechnen Sie die Determinante der Matrix A in Abhängigkeit von μ für alle $\mu \in \mathbb{R}$.
Lösung:

$\det(A) = \mu - 1$

(b) **[2 Punkte]**
Sei $\mu = 3$. Berechnen Sie die Inverse von A.
Lösung:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -5 & 7 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

(c) **[2 Punkte]** Sei $\mu = 1$. Bestimmen Sie **alle** Lösungen des inhomogenen linearen Gleichungssystems $Ax = b$.
Lösung:

Wir führen Zeilenoperationen durch;

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_3 - 2Z_1]{Z_2 - Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3 - Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Wählen wir $x_3 = t \in \mathbb{R}$ als freien Parameter, so ergibt sich $x_2 = 1 + 3x_3 = 1 + 3t$ und $x_1 = 1 - x_3 = 1 - t$. Die gesuchten Lösungen sind daher

$$x = \begin{pmatrix} 1 - t \\ 1 + 3t \\ t \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(d) **[4 Punkte]** Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix B. Finden Sie einen normierten Eigenvektor zu dem doppelten Eigenwert dieser Matrix.
Lösung:

Das charakteristische Polynom von B ist

$$\det(B-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} -2-\lambda & 4 & 2 \\ 5 & -9-\lambda & -5 \\ 3 & -5 & -3-\lambda \end{pmatrix} = \ldots = -\lambda^2(\lambda+14).$$

Die Matrix B hat also den doppelten Eigenwert 0 und den einfachen Eigenwert -14. Einen Eigenvektor zum Eigenwert 0 finden wir mit Zeilenoperationen;

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & 2 & 0 \\ 5 & -9 & -5 & 0 \\ 3 & -5 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_2+Z_1-Z_3} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & -3 & 0 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{Z_1+Z_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3-3Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Daraus ergibt sich $x_3 = t \in \mathbb{R}$, $x_2 = 0$ und $x_1 = x_2 + x_3 = t$. Die Eigenvektoren sind also

$$x = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Normiert ist dieser Vektor wenn $1 = \|x\| = \sqrt{t^2+t^2}$, also wenn $t = \pm 1/\sqrt{2}$.

4. Aufgabe **[9 Punkte]**

Betrachten Sie die Funktion $f(x,y) = x^2y + y^2 - 1$ und die Kurve in der (x,y)-Ebene gegeben durch die Bedingung $f(x,y) = 0$.

(a) [**2 Punkte**]
Finden Sie alle Schnittpunkte der Kurve mit der Geraden gegeben durch $y = x - 1$.
Lösung:

Wir setzen $y = x - 1$ in die Funktion ein und vereinfachen das resultierende Polynom;

$$f(x, x-1) = x^2(x-1) + (x-1)^2 - 1 = x^3 - 2x = x(x^2 - 2).$$

Dies ist 0 genau dann wenn $x = 0$, $x = \sqrt{2}$ oder $x = -\sqrt{2}$. Einsetzen dieser x-Werte in $y = x - 1$ liefert die Schnittpunkte $(0, -1)$ und $(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2} - 1)$.

(b) [**3 Punkte**]
Bestimmen Sie die Steigung der Tangente der Kurve im Punkt $(\sqrt{2}, \sqrt{2} - 1)$.
Lösung:

Für diese Teilaufgabe benutzen wir implizite Differentiation. Schreiben wir die Kurve als $y(x)$, dann gilt $f(x, y(x)) = 0$. Implizite Differentation sagt uns, dass

$$y'(x) = -\frac{f_x(x, y(x))}{f_y(x, y(x))}.$$

Die partiellen Ableitungen von f sind

$$f_x(x,y) = 2xy \qquad \text{und} \qquad f_y(x,y) = x^2 + 2y.$$

Damit erhalten wir die Steigung der Tangente als

$$y'(\sqrt{2}) = -\frac{2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{2 + 2(\sqrt{2}-1)} = 1 - \sqrt{2}.$$

(c) [**4 Punkte**]
Finden Sie alle kritischen Punkte von f unter der Nebenbedingung $x^2 + y = 1$. Bestimmen Sie jeweils, ob es sich um ein lokales Minimum, lokales Maximum oder einen Sattelpunkt handelt.
Lösung:

Wir schreiben die Nebenbedingung als $0 = x^2 + y - 1 = \phi(x,y)$. Nun betrachten wir die Lagrangefunktion

$$\Lambda(x, y, \lambda) = f(x,y) + \lambda\phi(x,y) = x^2y + y^2 - 1 + \lambda(x^2 + y - 1).$$

Wir berechnen die partiellen Ableitungen

$$\Lambda_x(x,y,\lambda) = 2xy + 2x\lambda, \qquad \Lambda_y(x,y,\lambda) = x^2 + 2y + \lambda, \qquad \Lambda_\lambda(x,y,\lambda) = x^2 + y - 1.$$

Wir setzen diese gleich 0 um die kritischen Punkte zu finden. Aus der dritten Gleichung folgt $x^2 = 1-y$. Setzen wir dies in die zweite Gleichung ein, bekommen wir $0 = 1+y+\lambda$. Setzen wir dies wiederum in die erste Gleichung ein, erhalten wir $0 = -2x$. Also muss gelten $x = 0$, $y = 1$ und $\lambda = -2$.

Um herauszufinden, was für einen Typ kritischer Punkt $(0,1)$ ist, betrachten wir die Matrix

$$H = \begin{pmatrix} \Lambda_{xx} & \Lambda_{xy} & \Lambda_{x\lambda} \\ \Lambda_{yx} & \Lambda_{yy} & \Lambda_{y\lambda} \\ \Lambda_{\lambda x} & \Lambda_{\lambda y} & \Lambda_{\lambda\lambda} \end{pmatrix} \Bigg|_{(x,y,\lambda)=(0,1,-2)} = \begin{pmatrix} 2(y+\lambda) & 2x & 2x \\ 2x & 2 & 1 \\ 2x & 1 & 0 \end{pmatrix} \Bigg|_{(x,y,\lambda)=(0,1,-2)} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ihre Determinante ist $\det(H) = 2 > 0$. Mithilfe der Klassifizierung, die wir aus der Vorlesung kennen, wissen wir damit, dass es sich um ein lokales Maximum handelt.

Alternative zur Bestimmung des Types: Setzen wir die Nebenbedingung in die Funktion ein, ergibt dies

$$f(x,y) = x^2y + y^2 - 1 = (1-y)y + y^2 - 1 = y - 1.$$

Aus der Nebenbedingung folgt $y - 1 = -x^2 \leq 0$. Daher gilt unter der Nebenbedingung, dass $f(x,y) \leq 0$. Insbesondere ist $f(0,1) = 0$ ein globales Maximum unter der Nebenbedingung.

5. Aufgabe **[10 Punkte]**

Finden Sie die Lösung folgender Anfangswertprobleme.

(a) **[3 Punkte]** $y' = 2x + y - 2$ mit $y(0) = 2$.
Lösung:

Wir präsentieren drei Lösungswege.

i. Die Differentialgleichung ist vom Typ $y' = f(ax + by + c)$. Daher führen wir die Substitution $u(x) = 2x + y(x) - 2$ durch. Es gilt $u'(x) = 2 + y'(x)$ und die DGL bekommt die Form $u'(x) - 2 = u(x)$. Also

$$\frac{du}{2+u} = dx \quad \Longrightarrow \quad \ln|2+u| = x+\tilde{C} \quad \Longrightarrow \quad 2+u = \pm e^{x+\tilde{C}} \quad \Longrightarrow \quad u = Ce^x - 2.$$

Wir setzen wieder $y = u + 2 - 2x$ ein und erhalten die allgemeine Lösung der DGL;

$$y(x) = Ce^x - 2x.$$

Die Anfangsbedingung $y(0) = 2$ ergibt $C = 2$. Die Lösung des Anfangswertproblems ist somit

$$y(x) = 2(e^x - x).$$

ii. Wir benutzen die Methode der Variation der Konstanten. Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung $y' - y = 0$ ist aus der Vorlesung bekannt als

$$y_0(x) = K \exp\Big(- \int (-1)dx \Big) = Ke^x.$$

Nun machen wir den Ansatz $y(x) = K(x)e^x$ und setzen dies in die inhomogene Differentialgleichung ein. Dies ergibt

$$2x - 2 = y'(x) - y(x) = K'(x)e^x + K(x)e^x - K(x)e^x = K'(x)e^x.$$

Mit partieller Integration finden wir

$$\begin{aligned} K(x) &= \int 2(x-1)e^{-x}dx + C = -2(x-1)e^{-x} + \int 2e^{-x}dx + C \\ &= -2(x-1)e^{-x} - 2e^{-x} + C = -2xe^{-x} + C. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist somit

$$y(x) = -2x + Ce^x.$$

Die Anfangsbedingung ergibt $2 = y(0) = C$. Die Lösung des Anfangswertporblems ist

$$y(x) = -2x + 2e^x.$$

iii. Wir suchen zuerst eine partikuläre Lösung. Da die Störfunktion ein Polynom ersten Grades ist, machen wir den Ansatz $y_p(x) = ax + b$. Einsetzen liefert

$$2x - 2 = y_p'(x) - y_p(x) = a - ax - b.$$

Also muss $a = -2$ und $b = 0$. Somit ist $y_p(x) = -2x$. Die homogene Lösung ist aus der Vorlesung bekannt: $y_0(x) = Ce^x$. Die allgemeine Lösung ist die Summe $y(x) = y_0(x) + y_p(x) = Ce^x - 2x$. Einsetzen der Anfangsbedingung ergibt $2 = y(0) = C$. Die gesuchte Lösung ist $y(x) = 2e^x - 2x$.

(b) **[3 Punkte]** $y' = 2y + 5\sin(x)$ mit $y(0) = 0$.
Lösung:

Wir präsentieren zwei Lösungswege.

i. Wir benutzen die Methode der Variation der Konstanten. Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung $y' - 2y = 0$ ist aus der Vorlesung bekannt als

$$y_0(x) = K \exp\Big(- \int (-2) dx \Big) = Ke^{2x}.$$

Nun machen wir den Ansatz $y(x) = K(x)e^{2x}$ und setzen dies in die inhomogene Differentialgleichung ein. Dies ergibt

$$5\sin(x) = y'(x) - 2y(x) = K'(x)e^{2x} + 2K(x)e^{2x} - 2K(x)e^{2x} = K'(x)e^{2x}.$$

Mit zweifacher partieller Integration finden wir

$$\begin{aligned} K(x) &= \int 5\sin(x)e^{-2x}dx + C = -5\cos(x)e^{-2x} - \int 10\cos(x)e^{-2x}dx + C \\ &= -5\cos(x)e^{-2x} - 10\sin(x)e^{-2x} - \int 20\sin(x)e^{-2x}dx + C \\ &= -5\cos(x)e^{-2x} - 10\sin(x)e^{-2x} - 4K(x) + 5C. \end{aligned}$$

Also ist die Formel für $K(x)$

$$K(x) = -\cos(x)e^{-2x} - 2\sin(x)e^{-2x} + C.$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist somit

$$y(x) = -\cos(x) - 2\sin(x) + Ce^{2x}.$$

Die Anfangsbedingung ergibt $0 = y(0) = -1 + C$. Die Lösung des Anfangswertporblems ist

$$y(x) = -\cos(x) - 2\sin(x) + e^{2x}.$$

ii. Wir suchen zunächst eine partikuläre Lösung. Da die Störfunktion $g(x) = 5\sin(x)$ ist, machen wir den Ansatz

$$y_p(x) = C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x).$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$5\sin(x) = y_p' - 2y_p = (C_1 - 2C_2)\cos(x) - (C_2 + 2C_1)\sin(x).$$

Mit einem Koeffizientenvergleich finden wir $C_1 - 2C_2 = 0$ und $C_2 + 2C_1 = -5$. Eine partikuläre Lösung ist also

$$y_p(x) = -2\sin(x) - \cos(x).$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung $y' - 2y = 0$ ist aus der Vorlesung bekannt, nämlich

$$y_0(x) = C\exp\Big(-\int(-2)dx\Big) = Ce^{2x}.$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist somit

$$y(x) = -2\sin(x) - \cos(x) + Ce^{2x}.$$

Die Anfangsbedingung ergibt $0 = y(0) = -1 + C$. Die Lösung des Anfangswertporblems ist

$$y(x) = -2\sin(x) - \cos(x) + e^{2x}.$$

(c) [**4 Punkte**] $y'' + 9y = 3\cos(2x)$ mit $y(\pi) = 3/5$ und $y'(\pi) = 3$.

Lösung:

Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung. Das charakteristische Polynom der homogenen Differentialgleichung $y'' + 9y = 0$ lautet

$$\lambda^2 + 9 = (\lambda + 3i)(\lambda - 3i)$$

mit Nullstellen $-3i$ und $3i$.

Da der Faktor 2 im Argument des Kosinus in der Störfunktion $g(x) = 3\sin(2x)$ keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, machen wir für eine partikuläre Lösung den Ansatz

$$y_p(x) = A\sin(2x) + B\cos(2x).$$

Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung wird zu

$$3\cos(2x) = y_p'' + 9y_p = 5A\sin(2x) + 5B\cos(2x).$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt $A = 0$ und $B = 3/5$ und eine partikuläre Lösung ist gegeben durch

$$y_p(x) = \frac{3}{5}\cos(2x).$$

Die allgemeine Lösung y_0 der homogenen Differentialgleichung kennen wir aus der Vorlesung, nämlich

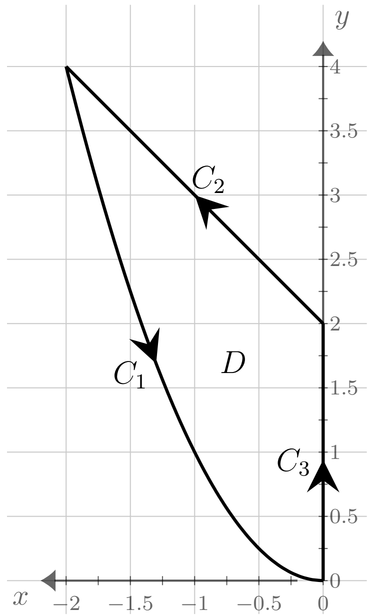
$$y_0(x) = C_1 \sin(3x) + C_2 \cos(3x).$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist daher

$$y(x) = y_p(x) + y_0(x) = \frac{3}{5}\cos(2x) + C_1 \sin(3x) + C_2 \cos(3x).$$

Die Anfangsbedingungen ergeben $3/5 = y(\pi) = 3/5 - C_2$ und $3 = y'(\pi) = -3C_1$. Die Lösung des Anfangswertproblems ist nun

$$y(x) = \frac{3}{5}\cos(2x) - \sin(3x).$$



6. Aufgabe **[8 Punkte]**

Für die Teilaufgabe (a): Schreiben Sie die Lösung in das vorgegebene Feld im Antwortheft. Sie brauchen **für (a) keine** Zwischenschritte oder Begründungen angeben. Antworten **zu (a)**, die Sie woanders als in das vorgebenene Feld im Antwortheft hinschreiben, werden **nicht** gewertet.

In der Skizze sehen Sie drei Kurven C_1, C_2, C_3. Die Kurve C_1 ist eine Parabel. An ihrem Endpunkt ist die Kurve C_1 flach, d.h. ihre Tangente ist dort parallel zur x-Achse. D ist die Fläche, die von den drei Kurven eingeschlossen wird.

(a) [**3 Punkte**] Finden Sie Parametrisierungen der drei Kurven. Beachten Sie die in der Skizze eingezeichneten Durchlaufrichtungen. Es gibt nicht nur eine Lösung.

Lösung:

Eine mögliche Lösung ist

$$C_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}, \qquad -2 \leq t \leq 0$$

$$C_2(t) = \begin{pmatrix} -t \\ t+2 \end{pmatrix}, \qquad 0 \leq t \leq 2$$

$$C_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, \qquad 0 \leq t \leq 2.$$

(b) [**3 Punkte**] Sei nun $\overrightarrow{F}$ das Vektorfeld $\overrightarrow{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 4xy + 4y \\ 2y - x(x+2) \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass

$$\int_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = -24 \quad \text{und} \quad \int_{C_2} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 16 \quad \text{und} \quad \int_{C_3} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 4.$$

Lösung:

Um ein Linienintegral zu berechnen, müssen wir die Kurve in das Vektorfeld einsetzen, die Kurve ableiten, und dann das Skalarprodukt von Vektorfeld und Ableitung integrieren. Es gilt

$$\overrightarrow{F}(C_1(t)) = \begin{pmatrix} 4t^3+4t^2 \\ 2t^2 - t(t+2) \end{pmatrix}, \qquad \dot{C}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$$
$$\Longrightarrow \overrightarrow{F}(C_1(t)) \cdot \dot{C}_1(t) = 6t^3$$
$$\Longrightarrow \int_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_{-2}^{0} 6t^3 dt = -24$$

und

$$\overrightarrow{F}(C_2(t)) = \begin{pmatrix} -4t(t+2)+4(t+2) \\ 2(t+2)+t(-t+2) \end{pmatrix}, \qquad \dot{C}_2(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\Longrightarrow \overrightarrow{F}(C_2(t)) \cdot \dot{C}_2(t) = 3t^2+8t-4$$
$$\Longrightarrow \int_{C_2} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_{0}^{2} (3t^2+8t-4) dt = 16$$

und

$$\overrightarrow{F}(C_3(t)) = \begin{pmatrix} 4t \\ 2t \end{pmatrix}, \qquad \dot{C}_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\Longrightarrow \overrightarrow{F}(C_3(t)) \cdot \dot{C}_3(t) = 2t$$
$$\Longrightarrow \int_{C_3} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_{0}^{2} 2t dt = 4.$$

(c) **[2 Punkte]** Mit C bezeichnen wir die geschlossene Kurve, die sich ergibt indem man C_1, C_2 und C_3 nacheinander durchläuft. Berechnen Sie $\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$, indem Sie den Satz von Gauss-Green anwenden und das resultierende Integral über die Fläche D berechnen.
Hinweis: Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis mit Teilaufgabe (b).
Lösung:

Wir schreiben das Vektorfeld $\overrightarrow{F}$ als $\overrightarrow{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))^T$. Der Satz von Gauss-Green besagt, dass

$$\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \iint_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dA,$$

wobei D in dieser Teilaufgabe die von der Kurve C eingeschlossene Fläche bezeichnet. Da $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -6(x+1)$, gilt also

$$\begin{aligned} \oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} &= \int_{-2}^{0} \int_{x^2}^{2-x} -6(x+1) dy dx = -\int_{-2}^{0} 6(x+1)(2-x-x^2) dx \\ &= \int_{-2}^{0} (6x^3+12x^2-6x-12) dx = \Big(\frac{3}{2}x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 12x\Big)\Big|_{-2}^{0} = -4. \end{aligned}$$