D–BIOL/D–CHAB/D–HEST

Prüfung Mathematik I/II

401-0291-00L / 401-0292-00L

Bitte noch nicht umblättern!

Aufgaben

1. Aufgabe **[14 Punkte]**

Schreiben Sie die Lösungen **vollständig gekürzt und vereinfacht** in das jeweils vorgegebene Feld im Antwortheft. Sie brauchen **keine** Zwischenschritte oder Begründungen angeben. Antworten, die Sie woanders als in das vorgebenene Feld im Antwortheft hinschreiben, werden **nicht** gewertet.

(a) [**1 Punkt**] Sei a_n die Folge $\dfrac{28n^4 + 13n^3 + n^2 - 7n + 20}{2n^5 - 7n^2 + 5n - 1}$. Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(b) [**1 Punkt**] Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = \ln(x^{-2}) + x^{-2}$.

(c) [**1 Punkt**] Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_1^e f(x)\,dx$ der Funktion $f(x) = x\big(\ln(x) - \frac{1}{2}\big)$.

(d) [**1 Punkt**] Finden Sie die Partialbruchzerlegung von $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 3x + 2}$.

(e) [**1 Punkt**] Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_{1/(2\pi)}^{1/\pi} f(x)\,dx$ der Funktion $f(x) = x^{-3}\cos(x^{-1})$.

(f) [**2 Punkte**] Finden Sie die beiden Zahlen $-\infty < r < s < \infty$ sodass die Funktion $f(x) = x^3 + 3x^2$ auf den Intervallen $(-\infty, r)$ und (s, ∞) monoton steigend ist und auf dem Intervall (r, s) monoton fallend.

(g) [**1 Punkt**] Betrachten Sie die Funktion $f(x) = x^3 + ax^2$ mit einem Parameter $a \in \mathbb{R}$. Finden Sie den Parameter $a \in \mathbb{R}$ sodass die Funktion f auf dem Intervall $(-\infty, -1)$ konkav und auf dem Intervall $(-1, \infty)$ konvex ist.

(h) [**2 Punkte**] Geben Sie mit ja/nein an, ob die folgende Funktion im Punkt $x = 0$ oder im Punkt $x = \pi/2$ stetig ist.

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & \text{falls } x < 0 \\ \ln(x^{-1}\sin(x)) & \text{falls } 0 \le x < \pi/2 \\ \ln(2/\pi) - 2x/\pi + 1 & \text{falls } x \ge \pi/2 \end{cases}$$

Hinweis: Es gilt $\lim_{x\to 0} x^{-1}\sin(x) = 1$.

(i) [**1 Punkt**] Ist die Funktion aus der vorherigen Teilaufgabe im Punkt $x = \pi/2$ differenzierbar? (Antworten Sie mit “ja/nein”.)

(j) [**2 Punkte**] Bestimmen Sie den zweiten und dritten Koeffizienten (also a_1 und a_2) der Taylorreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-\pi)^n$ von $f(x) = x\cos(x)$ um den Punkt π.

(k) [**1 Punkt**] Finden Sie die Zahl $s_0 \in (0, \infty)$ sodass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 s^{-n}$ für $s > s_0$ konvergiert.

2. Aufgabe **[9 Punkte]**

In dieser Aufgabe bezeichnet i die komplexe Einheit, also $i^2 = -1$, und $\bar{z}$ ist die komplex konjugierte Zahl von $z \in \mathbb{C}$. Schreiben Sie die Lösungen **vollständig gekürzt und vereinfacht** in das jeweils vorgegebene Feld im Antwortheft. Sie brauchen **keine** Zwischenschritte oder Begründungen angeben. Antworten, die Sie woanders als in das vorgebenene Feld im Antwortheft hinschreiben, werden **nicht** gewertet.

(a) [**3 Punkte**] Finden Sie die Lösung folgender Gleichungen. Geben Sie sie entweder in kartesischer Form oder in Polarform an.

(i) $z = \bar{z} + 2i$ und $\operatorname{Arg}(z) = 3\pi/4$

(ii) $\operatorname{Re}(iz) = 1$ und $\operatorname{Im}(z^2) = -4$

(iii) $z^3 = 27i$ und $\operatorname{Re}(z) < 0$

(b) [**3 Punkte**] Geben Sie folgende Zahlen in kartesischer Form an.

(i) $z = e^{i\frac{3\pi}{4}} \operatorname{Im}\left(\overline{i(3+i)}\right) + \operatorname{Re}\left(\dfrac{-5}{2+i}\right)$

(ii) $z = \left[\cos\left(\dfrac{\pi}{20}\right) - i \sin\left(-\dfrac{\pi}{20}\right)\right]^{10}$

Hinweis: Bringen Sie die Zahl zuerst in Polarform.

(iii) $z = i\left(1 + \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right) + \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

(c) [**3 Punkte**] Betrachten Sie die Menge

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid 2\operatorname{Im}(z) \geq \operatorname{Re}(z)\}$$

in der komplexen Ebene. Seien $z_1 = \sqrt{8}e^{i\frac{7\pi}{4}}$ und $z_2 = e^{i\frac{\pi}{2}}$. Entscheiden Sie jeweils mit "ja/nein", ob die folgenden komplexen Zahlen in der Menge D liegen oder nicht.

(i) $z_1 + z_2$ (iii) $z_1 z_2$ (v) z_1/z_2

(ii) $\bar{z}_1 + z_2$ (iv) $\bar{z}_1 z_2$ (vi) $\bar{z}_1/z_2$

3. Aufgabe **[9 Punkte]**

Für die Teilaufgaben (a) und (b): Schreiben Sie die Lösungen in das vorgegebene Feld im Antwortheft. Sie brauchen **für (a) und (b) keine** Zwischenschritte oder Begründungen angeben. Antworten **zu (a) und (b)**, die Sie woanders als in das vorgebenene Feld im Antwortheft hinschreiben, werden **nicht** gewertet.

Betrachten Sie folgende Matrizen A und B sowie den Vektor b. Die Matrix A hängt von einem Parameter $\mu \in \mathbb{R}$ ab.

$$A = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 5 & -9 & -5 \\ 3 & -5 & -3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) [**1 Punkt**]
Berechnen Sie die Determinante der Matrix A in Abhängigkeit von μ für alle $\mu \in \mathbb{R}$.

(b) [**2 Punkte**]
Sei $\mu = 3$. Berechnen Sie die Inverse von A.

(c) [**2 Punkte**] Sei $\mu = 1$. Bestimmen Sie **alle** Lösungen des inhomogenen linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

(d) [**4 Punkte**] Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix B. Finden Sie einen normierten Eigenvektor zu dem doppelten Eigenwert dieser Matrix.

4. Aufgabe **[9 Punkte]**

Betrachten Sie die Funktion $f(x, y) = x^2y + y^2 - 1$ und die Kurve in der (x, y)-Ebene gegeben durch die Bedingung $f(x, y) = 0$.

(a) [**2 Punkte**]
Finden Sie alle Schnittpunkte der Kurve mit der Geraden gegeben durch $y = x - 1$.

(b) [**3 Punkte**]
Bestimmen Sie die Steigung der Tangente der Kurve im Punkt $(\sqrt{2}, \sqrt{2} - 1)$.

(c) [**4 Punkte**]
Finden Sie alle kritischen Punkte von f unter der Nebenbedingung $x^2 + y = 1$. Bestimmen Sie jeweils, ob es sich um ein lokales Minimum, lokales Maximum oder einen Sattelpunkt handelt.

5. Aufgabe **[10 Punkte]**

Finden Sie die Lösung folgender Anfangswertprobleme.

(a) **[3 Punkte]** $y' = 2x + y - 2$ mit $y(0) = 2$.

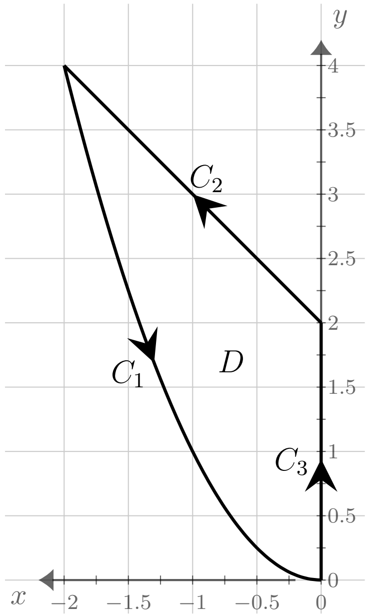
(b) **[3 Punkte]** $y' = 2y + 5\sin(x)$ mit $y(0) = 0$.

(c) **[4 Punkte]** $y'' + 9y = 3\cos(2x)$ mit $y(\pi) = 3/5$ und $y'(\pi) = 3$.

6. Aufgabe **[8 Punkte]**

Für die Teilaufgabe (a): Schreiben Sie die Lösung in das vorgegebene Feld im Antwortheft. Sie brauchen **für (a) keine** Zwischenschritte oder Begründungen angeben. Antworten **zu (a)**, die Sie woanders als in das vorgebenene Feld im Antwortheft hinschreiben, werden **nicht** gewertet.

In der Skizze sehen Sie drei Kurven C_1, C_2, C_3. Die Kurve C_1 ist eine Parabel. An ihrem Endpunkt ist die Kurve C_1 flach, d.h. ihre Tangente ist dort parallel zur x-Achse. D ist die Fläche, die von den drei Kurven eingeschlossen wird.



(a) **[3 Punkte]** Finden Sie Parametrisierungen der drei Kurven. Beachten Sie die in der Skizze eingezeichneten Durchlaufrichtungen. Es gibt nicht nur eine Lösung.

(b) **[3 Punkte]** Sei nun $\vec{F}$ das Vektorfeld $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 4xy + 4y \\ 2y - x(x+2) \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -24 \qquad \text{und} \qquad \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 16 \qquad \text{und} \qquad \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 4.$$

(c) **[2 Punkte]** Mit C bezeichnen wir die geschlossene Kurve, die sich ergibt indem man C_1, C_2 und C_3 nacheinander durchläuft. Berechnen Sie $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, indem Sie den Satz von Gauss-Green anwenden und das resultierende Integral über die Fläche D berechnen.

Hinweis: Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis mit Teilaufgabe (b).