Aufgaben und Lösungsvorschlag

Aufgabe 1

1.MC1 Berechnen Sie die Ableitung von $f(x) = \sin(x) \cdot (1-x)$.

(A) **TRUE:** $f'(x) = \cos(x)(1-x) - \sin(x)$

(B) $f'(x) = \cos(x)(x-1) - \sin(x)$

(C) $f'(x) = \cos(x)(1-x) + \sin(x)$

(D) $f'(x) = \cos(x)(x-1) + \sin(x)$

Lösung:

Es gilt (mit Produktregel) $f'(x) = \cos(x)(1-x) - \sin(x)$.

1.MC2 Der Grenzwert $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\sin(x)\cdot(1-x)}$ ist gegeben durch

(A) 1.

(B) -1.

(C) **TRUE:** 2.

(D) $\frac{1}{2}$.

Lösung:

Ref: Mathe1-MC3-5 & Wi21-1a

Wir verwenden l'Hôspital und bekommen

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\sin(x)\cdot(1-x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x}}{\cos(x)(1-x)-\sin(x)} = \frac{2}{1}.$$

1.MC3 Gegeben sei f mit $f(x) = \cos(2x)$. Wie lautet die Gleichung der Tangente $y = ax + b$ an den Graphen von f an der Stelle $x_0 = \frac{\pi}{4}$?

(A) **TRUE:** $y = \frac{\pi}{2} - 2x$

(B) $y = -\frac{\pi}{2}$

(C) $y = 1 + \frac{\pi}{2} - 2x$

(D) $y = 2x + \frac{\pi}{2}$

Lösung:

Ref: Mathe1-MC4-4

Wir berechnen $f(x_0) = 0$ und $f'(x_0) = -2\sin(2x_0) = -2$.

Die Tangente ist also $y(x) = -2(x - x_0) = \frac{\pi}{2} - 2x$.

1.MC4 Sei h die Funktion mit $h(x) = (x-2)(x^2+x-6)+x$.

Die Funktion hat die Fixpunkte $x_1 = 2$ und $x_2 = -3$. Bestimmen Sie den dritten Fixpunkt x_3.

(A) $x_3 = -2$

(B) $x_3 = 3$

(C) **TRUE:** $x_3 = 2$

(D) $x_3 = -3$

Lösung:

Es vereinfacht sich $h(x) = x$ zu $(x-2)(x^2+x-6) = 0$. Es gilt (NST berechnen mit Mitternachtsformel oder durch Faktorisierung mit Vieta.), dass $(x^2+x-6) = (x-2)(x+3)$, daher können wir ablesen, dass der 3. FP $x_3 = 2$ ist.

1.MC5 Seien a und d Zahlen, und sei f die Funktion mit $f(x) = \dfrac{ax^3}{x+d}$.

Welches Paar a und d garantiert, dass $\tilde{x} = \dfrac{1}{2}$ ein attraktiver Fixpunkt ist? Das heisst, jede Folge (x_n) mit $x_{n+1} = f(x_n)$ und x_0 nahe $\tilde{x}$ konvergiert gegen $\tilde{x}$.

(A) **TRUE:** $a = \dfrac{2}{3}$ und $d = -\dfrac{1}{3}$

(B) $a = 1$ und $d = -\dfrac{1}{4}$

(C) $a = 1$ und $d = -\dfrac{3}{8}$

(D) $a = \dfrac{4}{7}$ und $d = -\dfrac{1}{7}$

Lösung:

Da $\frac{1}{2}$ ein FP ist muss gelten $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ was sich zu $a = 2 + 4d$ vereinfacht. Damit es ein attraktiver FP ist muss $|f'(\frac{1}{2})| < 1$ gelten. Wir berechnen $f'(\frac{1}{2})$ und setzen die erste Bedingung (genauer: $\frac{1}{2} + d = \frac{a}{4}$) ein um $f'(\frac{1}{2}) = 3 - \frac{2}{a}$ zu erhalten. Nur die Wahl $a = \frac{2}{3}$ und $d = -\frac{1}{3}$ erfüllt beide Bedingungen.

1.MC6 Für welche obere Integralgrenze b gilt $\displaystyle\int_{-\pi}^{b} \frac{-\sin(x)}{\cos(x)+2}dx = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$?

Hinweis: Es gilt $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln(|f(x)|) + C$.

(A) $b = 0$

(B) $b = \pi$

(C) $b = \dfrac{\pi}{4}$

(D) **TRUE:** $b = \dfrac{2\pi}{3}$

Lösung:

Ref: Wi21-1b-ii
Wir berechnen $\ln(\frac{3}{2}) = \int_{-\pi}^{b} \frac{-\sin(x)}{\cos(x)+2}dx = [\ln(\cos(x)+2)]_{-\pi}^{b} = \ln(\cos(b)+2)$ also muss $\cos(b) = -\frac{1}{2}$ gelten, was hier nur für $b = \frac{2\pi}{3}$ erfüllt ist.

1.MC7 Sei F eine Funktion definiert durch $F(x) = \displaystyle\int_2^x \frac{1}{t^2}\,dt$.

Welchen Wert hat $F(4)$?

(A) $F(4) = \dfrac{3}{16}$

(B) $F(4) = -\dfrac{3}{16}$

(C) **TRUE:** $F(4) = \dfrac{1}{4}$

(D) $F(4) = -\dfrac{1}{4}$

Lösung:

Wir berechnen $F(4) = \int_2^4 \frac{1}{t^2}dt = [-t^{-1}]_2^4 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

1.MC8 Sei f eine Funktion mit $f(x) = e^{2x}$ und $T_2(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2$ als dem 2. Taylor-Polynom **an der Stelle** $x_0 = 1$. Bestimmen Sie den Koeffizienten a_2.

(A) $a_2 = 2e$

(B) $a_2 = 4e$

(C) **TRUE:** $a_2 = 2e^2$

(D) $a_2 = 4e^2$

Lösung:

Es sind $f'(x) = 2e^{2x}$ und $f''(x) = 4e^{2x}$. Damit gilt $a_2 = \frac{1}{2}f''(1) = \frac{1}{2}(4e^2) = 2e^2$.

Aufgabe 2

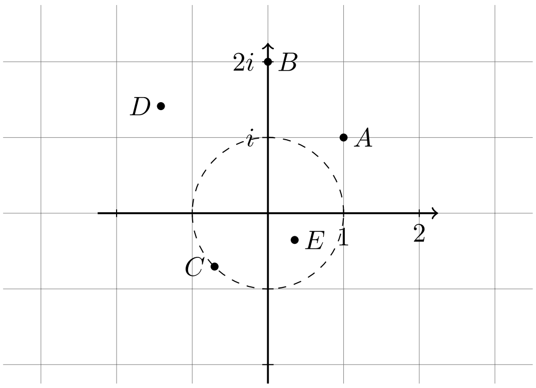
2.MC1 Welchen Imaginärteil hat die komplexe Zahl $w = 2e^{-\frac{3\pi}{4}i}$?

(A) **TRUE:** $\mathrm{Im}(w) = -\sqrt{2}$
(B) $\mathrm{Im}(w) = \sqrt{2}$
(C) $\mathrm{Im}(w) = \sqrt{3}$
(D) $\mathrm{Im}(w) = -\sqrt{3}$

Lösung:

Es gilt $w = 2e^{-\frac{3\pi}{4}i} = 2(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i) = -\sqrt{2}(1+i)$.

2.MC2 Betrachten Sie die Zahlen A bis E in der komplexen Zahlenebene. Welche der folgenden Gleichungen passt dazu?



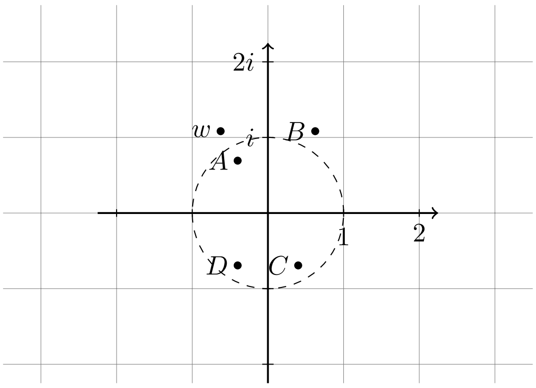
(A) $BC^2 = D$
(B) **TRUE:** $A^2 = B$
(C) $D^{-1} = E$
(D) $EC^{-1} = A$

Lösung:

Ref: Mathe2-MC1-8.

Man sieht leicht, dass $A^2 = B$ gilt. Ausserdem können wir die anderen Möglichkeiten ausschliessen, da $|EC^{-1}| = |E| < |A|$, $\arg(BC^2) = \pi \neq \arg(D)$ und $\arg(D^{-1}) = -\frac{3\pi}{4} \neq \arg(E)$.

2.MC3 Betrachten Sie die Zahlen A bis D und w in der komplexen Zahlenebene. Welche entspricht der komplexen Zahl $\overline{w}^{-1}$?



(A) **TRUE:** A
(B) B
(C) C
(D) D

Lösung:

4. Ref: Mathe2-MC1-1&7
Es gilt $\arg(\overline{w}^{-1}) = \arg(w)$ und $|w| > 1 > |\overline{w}^{-1}|$, daher ist der Buchstaben A korrekt.

2.MC4 Es ist $\left(6\sqrt{2}(1+i)\right)^3 = \dots$

(A) $6^3 e^{\frac{-3\pi}{4}i}$.

(B) $2^6 3^3 \sqrt{2}(1+i)$.

(C) **TRUE:** $2^5 3^3(-\sqrt{2} + i\sqrt{2})$.

(D) $6^3 2^{3/2}$.

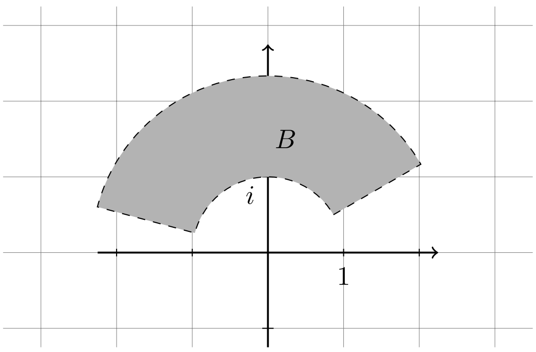
Lösung:

Lösung Erklärung: $\left(6\sqrt{2}(1+i)\right)^3 = (2^2 3 e^{\frac{\pi}{4}i})^3 = 2^6 3^3 e^{\frac{3\pi}{4}i} = 2^5 3^3(-\sqrt{2} + i\sqrt{2})$. Ref: Mathe2-MC1-6.

2.MC5 Die Skizze unten zeigt ein Gebiet B (Rand **nicht** enthalten) in der komplexen Ebene mit

$$B = \left\{ z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \;\middle|\; 1 < r < \frac{7}{3}, \frac{\pi}{6} < \varphi < \frac{11\pi}{12} \right\}.$$

Seien $z_1 = 2e^{\frac{\pi}{2}i}$ und $z_2 = -1 - i$. Welche der folgenden Zahlen liegt in B?



(A) $\frac{z_1}{z_2}$

(B) $z_1 \cdot z_2$

(C) **TRUE:** $z_1 + z_2$

(D) $z_2 - z_1$

Lösung:

Ref: Mathe2-MC2-4&5.

Erklärung:

$z_1 = 2e^{\frac{\pi}{2}i} = 2i$ und $z_2 = -1 - i = \sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i}$.
Daher gilt $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}}e^{\frac{5\pi}{4}i} \notin B$ (wegen zu grossem Argument),
$z_1 \cdot z_2 = 2\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i} \notin B$ (wegen zu kleinem Argument),
$z_1 + z_2 = 2i - 1 - i = -1 + i \in B$ und
$z_1 - z_2 = 1 + 3i \notin B$ (wegen zu grossem Betrag).

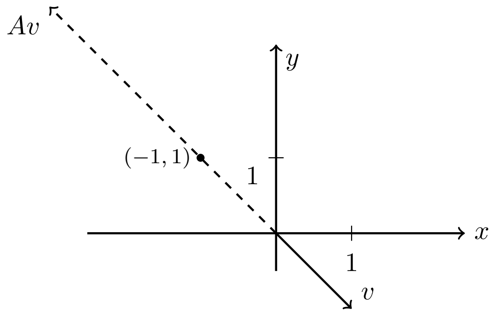
2.MC6 Welche Matrix A passt zu folgendem Bild ?

(A) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

(B) $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

(C) **TRUE:** $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

(D) $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$



Lösung:

Die Vektoren v und Av liegen auf der Winkelhalbierenden $x = -y$.

Daher muss $\begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}$ ein EV sein. Das ist nur bei $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ der Fall.

2.MC7 Sei $C_b = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ b^3 & -3 & -4 \\ b^4 & b^2 & 2 \end{pmatrix}$. Für welchen Wert von $b \in \mathbb{R}$ hat C_b nur reelle Eigenwerte?

(A) $b = -2$

(B) **TRUE:** $b = -\frac{1}{16}$

(C) $b = 2$

(D) $b = \frac{21}{16}$

Lösung:

Ref: Mathe2-MC2-6.

Erklärung:

$$\begin{aligned} \det(C_b - \lambda \cdot E_3) &= (7-\lambda)(-3-\lambda)(2-\lambda) + 4b^2(7-\lambda) \\ &= (7-\lambda)\left[(2-\lambda)(-3-\lambda) + 4b^2\right] \\ &= (7-\lambda)\left[\lambda^2 + \lambda + (4b^2 - 6)\right] \end{aligned}$$

Also gibt es nur reellwertige Eigenwerte falls $1 - 4(4b^2 - 6) \geq 0$, also falls $|b| \leq \frac{5}{4}$.

2.MC8 Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} -7 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 2 \\ \frac{1}{3} & 3 & -3 \end{pmatrix}$. Welcher der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor von A^3?

(A) $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(B) **TRUE:** $-2^5\sqrt{\pi}\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}$

(C) $3^7\sin(4)\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}$

(D) $-2^7\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$

Lösung:

> Ref: Mathe1-Serie 12
> $v = \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}$ ist ein EV von A, daher ist $c \cdot v$ mit $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ebenfalls ein EV von A und somit auch von A^3.

2.A1 [**4 Punkte**] Gegeben sei die Matrix $D_b = \begin{pmatrix}3 & 5 & 3\\-2 & -2 & 0\\4 & 0 & b\end{pmatrix}$ mit $b \in \mathbb{R}$.

(i) Berechnen Sie die Determinante von D_b in Abhängigkeit von b.

Lösung:

> Ausrechnen mit Sarrus oder Laplace ergibt $\det(D_b) = 4b + 24$.

(ii) Wir betrachten das lineare Gleichungssystem $D_b \cdot x = \begin{pmatrix}0\\-2\\z\end{pmatrix}$. Bestimmen Sie b und z so, dass sowohl $\begin{pmatrix}0\\1\\-\frac{5}{3}\end{pmatrix}$ als auch $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ eine Lösung x des Gleichungssystems sind.

Lösung:

> Damit es zwei verschieden Lösungen gibt muss $\det(D_b) = 0$ gelten, also $b = -6$. Die 3. Gleichung von der zweiten Lösung ist $4 - b = z$, woraus mit $b = -6$ folgt, dass $z = 10$.
> Alternativ kann man auch das Gleichungssystem der beiden 3. Gleichungen $-\frac{5}{3}b = z$ und $4 - b = z$ auflösen.

(iii) Sei $F = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\-2 & -2 & 0\\4 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Für welche $b \in \mathbb{R}$ ist das Produkt D_bF invertierbar?

Lösung:

Wir verwenden, dass das Produkt D_bF genau dann invertierbar ist, wenn die Determinante $\det(D_bF) = \det(D_b)\det(F) \neq 0$ ist. Da $\det(F) = 0$ folgt, dass kein $b \in \mathbb{R}$ existiert so dass D_bF invertierbar ist.

Aufgabe 3

3.MC1 Für welches a ist die Funktion $x \mapsto y(x) = e^{ax} - \dfrac{1}{2}$ eine Lösung der DGL $y' = ay + 2$?

(A) $a = -\dfrac{1}{2}$

(B) $a = \dfrac{1}{2}$

(C) $a = 2$

(D) **TRUE:** $a = 4$

Lösung:

Einsetzen der LSG in die DGL liefert $ae^{ax} = ae^{ax} - a\frac{1}{2} + 2$, also $a = 4$.

3.MC2 Sei $y(x) = C \cdot e^{2x} - 3$ die Lösung einer Differentialgleichung mit $y(\ln(3)) = 6$.
Bestimmen Sie den Wert $y_0 = y\,(0)$.

(A) $y(0) = -4$

(B) $y(0) = 3$

(C) **TRUE:** $y(0) = -2$

(D) $y(0) = -\frac{8}{3}$

Lösung:

Aus $6 = y(\ln(3)) = Ce^{\ln(3^2)} - 3 = 9C - 3$ folgt $C = 1$. Daher $y(0) = 1 - 3 = -2$.

3.MC3 Gegeben sei das Anfangswertproblem mit $y'(x) = (5 - y(x)) \cdot (3 + y(x))$ und $y(0) = y_0$.
Für welchen Wert y_0 ist die Lösungskurve streng monoton wachsend?

(A) **TRUE:** $y_0 = 4$

(B) $y_0 = -3$

(C) $y_0 = 7$

(D) $y_0 = -4$

Lösung:

Die Fixpunkte ($y' = 0$) sind an den Stellen $y = -3$ und $y = 5$. Der Graph der rechten Seite ist eine nach unten geöffnete Parabel, daher ist y' negativ für $y < -3$ oder $y > 5$ und positiv für $y \in]-3, 5[$.

3.MC4 Sei $y'(x) = (3-y(x))(2-y(x))(y(x)+3)$. Für die Lösung y mit $y(0) = 1$ gilt $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = \ldots$

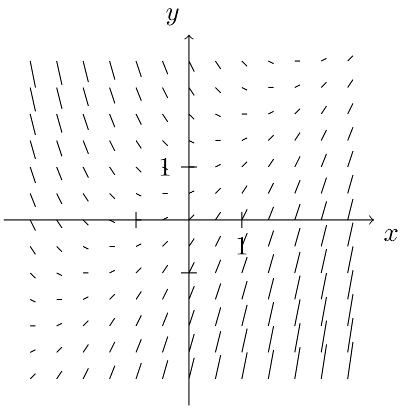
(A) -3.
(B) **TRUE:** 2.
(C) 3.
(D) 0.

Lösung:

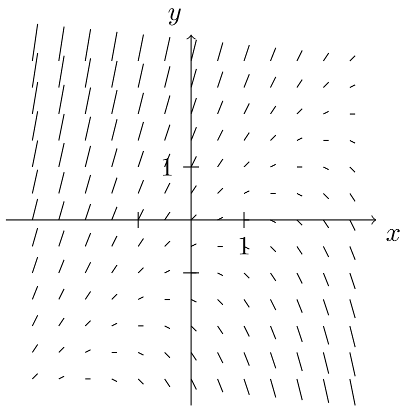
Es gibt drei stationäre Lösungen $y_{\infty,1} = -3$, $y_{\infty,2} = 2$ und $y_{\infty,3} = 3$.

Der Anfangswert ist $-3 < y(0) = 1 < 2$, und die Ableitung zwischen -3 und 2 ist positiv, daher konvergiert die Lösung des AWPs gegen 2.

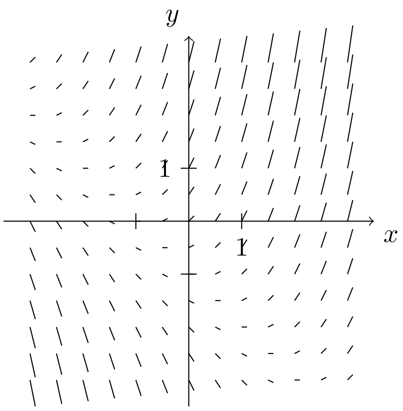
3.MC5 Welches Richtungsfeld passt zu $y'(x) = y - x + 1$?

(A)


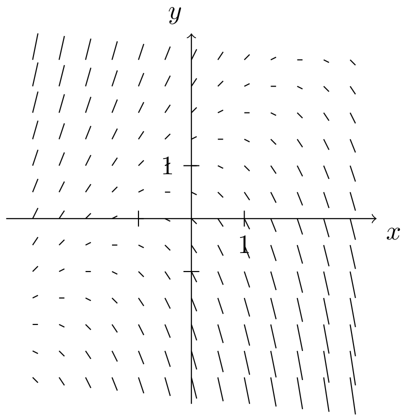
FALSE:

(B)


TRUE:

(C)


FALSE:

(D)


FALSE:

Lösung:

Für $x = y$ gilt jeweils $y' = 1$, was nur bei A und B zutrifft. Für $x > 1$ und $y = 0$ gilt $y' < 0$, was nur bei B und D zutrifft. Daher kann nur B stimmen.

3.MC6 Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 5 & \alpha \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, mit $\alpha \in \mathbb{R}$, definiert das DGL-System $y' = Ay$. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ soll gelten, dass

$$\left\{ t \to y(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Lösung dieses Systems ist. Für welche Wahl von λ und α stimmt das?

(A) $\lambda = -4$ und $\alpha = 3$

(B) $\lambda = -4$ und $\alpha = -3$

(C) **TRUE:** $\lambda = 4$ und $\alpha = -3$

(D) $\lambda = 4$ und $\alpha = 3$

Lösung:

Es muss gelten, dass $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ ein EV von A zum EW λ ist. Wir berechnen daher

$$A \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 + 2\alpha \\ 12 - 4 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $\lambda = 4$, was wir in die erste Gleichung einsetzten um $\alpha = -3$ zu bekommen.

3.MC7 Sei $y' = Ay$ das DGL-System mit $A = \begin{pmatrix} 6 & \beta \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Für welchen Wert von β hat das System sicher eine stationäre Lösung $y_\infty \neq 0$?

(A) $\beta = 9$

(B) $\beta = -2$

(C) $\beta = 2$

(D) **TRUE:** $\beta = -9$

Lösung:

Es muss $\det A = 0$ gelten, was für $\beta = -9$ der Fall ist.

3.MC8 Für $a \in \mathbb{R}$ sei $y''(x) + a \cdot y'(x) + 4y(x) = 0$.

Für welches a definiert $y(x) = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{-4x}$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung?

(A) $a = -5$

(B) **TRUE:** $a = 5$

(C) $a = 9$

(D) $a = -9$

Lösung:

Das charakteristischen Polynom ist $p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + 4$. Die Nullstellen sind $\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 16}}{2}$, und es muss gelten $\lambda_{1,2} \in \{-1, -4\}$. Einsetzen der gegebenen Werte zeigt, dass dies für $a = 5$ gilt.

3.A1 [6 Punkte] Wir betrachten die Differentialgleichung $y'(x) = -3y(x) - (2x - 3)e^{-x^2}$.

(i) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung durch Variation der Konstanten.

Hinweis: Es gilt $\int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)} + C$.

Lösung:

Die homogene DGL $y'(x) = 3y(x)$ hat die allgemeine Lösung $y_{hom}(x) = Ce^{-3x}$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL finden wir mit Variation der Konstanten, indem wir $y(x) = C(x)e^{-3x}$ in die inhomogene DGL einsetzen. Das liefert

$$C'(x)e^{-3x} = -(2x-3)e^{-x^2}.$$

Umstellen und integrieren führt zu

$$C(x) = \int (3-2x)e^{3x-x^2} = e^{3x-x^2} + c$$

und damit

$$y(x) = e^{-x^2} + ce^{-3x}.$$

Alternative:

Die DGL ist von der Form $y'(x) = p(x)y(x) + q(x)$ mit $p(x) = -3$ und $q(x) = (3-2x)e^{-x^2}$. Variation der Konstanten liefert die allgemeine Lösung durch $y(x) = (K(x)+c)e^{P(x)}$, dabei sind $P'(x) = p(x)$, c eine Konstanten und $K(x) = \int q(x)e^{-P(x)}$.

Es folgt, dass $P(x) = -3x$ und $K(x) = \int (3-2x)e^{3x-x^2} = e^{3x-x^2}$. Damit haben wir die allgemeine Lösung

$$y(x) = e^{-x^2} + ce^{-3x}.$$

(ii) Sei $y(0) = 3$. Bestimmen Sie die Lösung das Anfangwertproblems und $\lim_{x\to\infty} y(x)$.

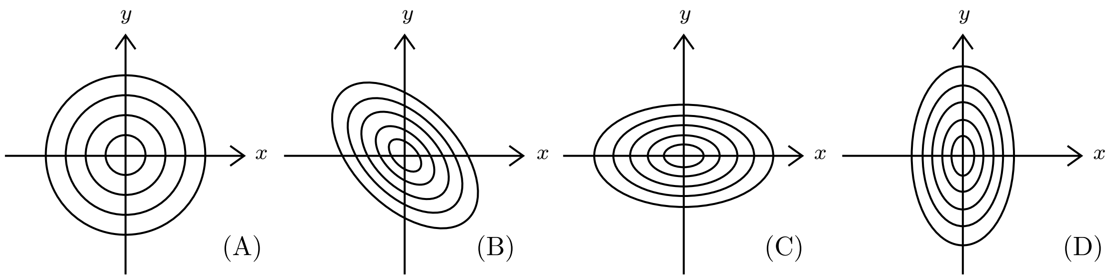
Lösung:

Aus $3 = y(0) = 1 + c$ folgt $c = 2$, somit ist die LSG des AWP $y(x) = e^{-x^2} + 2e^{-3x}$. Davon unabhängig können wir berechnen, dass

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = \lim_{x\to\infty} e^{-x^2} + ce^{-3x} = 0.$$

Aufgabe 4

4.MC1 Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = x^2 + 2y^2$. Welches der folgenden Bilder zeigt Niveaulinien (oder Höhenlinien) der Funktion f?



Lösung:

(C)

4.MC2 Seien $a \in \mathbb{R}$ und die Funktion $g_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g_a(x, y) = 4 + x(ax - 3) + (4a - y)^2$. Für welches a ist $(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{a^2}, \frac{8}{3}\right)$ ein kritischer Punkt von g_a?

(A) $a = -3$
(B) **TRUE:** $a = \frac{2}{3}$
(C) $a = 4$
(D) $a = -\frac{2}{3}$

Lösung:

Der Gradient berechnet sich mit den partiellen Ableitungen als

$$\nabla g_a(x, y) = \Big(2ax - 3, -(8a - 2y)\Big)$$

Setzen wir nun den Punkt (x_0, y_0) ein und nutzen die Bedingung, dass es sich um einen kritischen Punkt handeln soll, erhalten wir

$$\left(\frac{2}{a^2} - 3, -8a + \frac{16}{3}\right) = (0, 0)\,.$$

Daraus folgt, dass $a = 2/3$ gelten muss.

4.MC3 Für die Funktion g_a aus Aufgabenteil **4.MC2** sei nun $a = 2$:

Für welchen Wert von b beschreibt der Graph der Funktion $l : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $l(x, y) = 24 + 5x + by$ die Tangentialebene von g_2 an der Stelle $(x_0, y_0) = (2, 6)$?

(A) $b = 5$

(B) $b = -2$

(C) $b = 12$

(D) **TRUE:** $b = -4$

Lösung:

Für $a = 2$ erhalten wir mit unserer allgemeinen Berechnung für den Gradienten, und durch einsetzen von $(x_0, y_0) = (2, 6)$, dass

$$\nabla g_2(x_0, y_0) = (\partial_x g_2(x_0, y_0), \partial_y g_2(x_0, y_0)) = (5, -4)\,.$$

Nun benötigen wir noch $g_2(x_0, y_0) = 10$. Mit der Formel für die Tangentialebene

$$l(x, y) = g_2(x_0, y_0) + \partial_x g_2(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_y g_2(x_0, y_0)(y - y_0)$$

erhalten wir dann

$$l(x, y) = 10 + 5(x - 2) - 4(y - 6) = 24 + 5x - 4y\,,$$

womit $b = -4$ folgt.

Abkürzung: Den Punkt $(x_0, y_0) = (2, 6)$ in l und g_2 einsetzen und nach b auflösen.

4.MC4 Die Tangentialebene aus Aufgabenteil **4.MC3** schneidet die Gerade $\{(1, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$ in einem Punkt. Bestimmen Sie die z-Koordinate dieses Schnittpunktes. **Hinweis:** Die Antwort hängt **nicht** von b in Aufgabenteil **4.MC3** ab.

(A) **TRUE:** 29

(B) 26

(C) 60

(D) 0

Lösung:

Hier müssen wir lediglich die Koordinaten $(x, y) = (1, 0)$ einsetzen um die z-Koordinate zu berechnen. Wir erhalten $g_2(1, 0) = 29$.

4.MC5 Sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $h(x, y) = x^2 - 3xy + y^3$. Welcher der folgenden Punkte liegt auf der Niveaukurve zur Höhe 9?

(A) $(x, y) = (-1, 1)$

(B) **TRUE:** $(x, y) = (2, -1)$

(C) $(x, y) = (-1, -1)$

(D) $(x, y) = (1, -2)$

Lösung:

Nachprüfen der einzelnen Punkte liefert die Lösung $h(2, -1) = 9$.

4.MC6 Sei h die Funktion aus Aufgabenteil **4.MC5**. Sei γ die Niveaukurve von h in der (x, y)-Ebene, auf der $P = (1, 0)$ liegt. Welche Steigung hat die Tangente an γ in P?

(A) $-\frac{2}{3}$

(B) $-\frac{3}{2}$

(C) **TRUE:** $\frac{2}{3}$

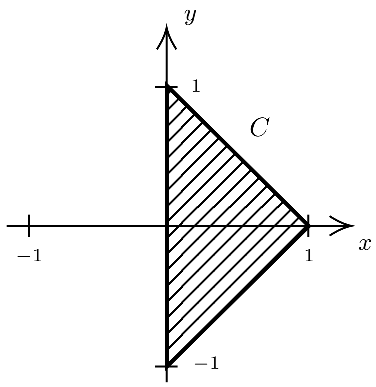
(D) $\frac{3}{2}$

Lösung:

Es ist γ gegeben durch $\{(x, y)|x^2-3xy+y^3 = h(1, 0) = 1\}$ oder für die implizite Differentiation durch $F(x, y) = x^2 - 3xy + y^3 - 1 = 0$ mit der Tangentensteigung:

$$-\frac{F_x(1,0)}{F_y(1,0)} = -\frac{2}{-3} = \frac{2}{3}$$

4.MC7 Gegeben sei das Gebiet C:



Welcher Integralausdruck berechnet den Flächeninhalt von C?

(A) **TRUE:** $\int_0^1 \int_{x-1}^{1-x} dy\, dx$

(B) $\int_0^1 \int_0^{1-y} dx\, dy$

(C) $\int_{-1}^1 \int_0^1 dy\, dx$

(D) $\int_{-1}^1 \int_{y-1}^{1-y} dx\, dy$

Lösung:

Ergibt sich mit der richtigen Beschreibung von C. Alternativ lassen sich die Integrale schnell berechnen.

4.MC8 Sei $\widetilde{C}$ nur die obere Hälfte von C aus Aufgabenteil **4.MC7**, das heisst, es muss $y \geq 0$ sein. Für welches $K \in \mathbb{R}$ ist $\iint_{\widetilde{C}} (2y + K)\, dA = \frac{11}{6}$?

(A) $K = 1$

(B) $K = 2$

(C) **TRUE:** $K = 3$

(D) $K = 4$

Lösung:

Wir berechnen $\iint_{\widetilde{C}} 2y + K\, dA = \int_0^1 \int_0^{1-y} 2y + K\, dx\, dy = \int_0^1 \left[2xy + Kx \Big|_0^{1-y} dy \right.$. Damit ist dann

$$\iint_{\widetilde{C}} 2y + K\, dA = \int_0^1 2y(1-y) + K(1-y)\, dy = \left[\frac{2-K}{2} y^2 - \frac{2}{3} y^3 + Ky \right|_0^1 .$$

Einsetzen der Grenzen liefert $\iint_{\widetilde{C}} 2y + K\, dA = \frac{2-K}{2} - \frac{2}{3} + K \stackrel{!}{=} \frac{11}{6}$. Für $K = 3$ lösen wir die Gleichung nach K auf.

4.A1 [4 Punkte]

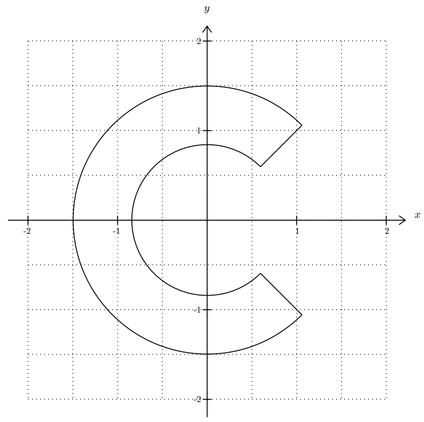
(i) Sei die Menge

$$P = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x,y) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)), r \in \left[\sqrt{\ln(2)}, \sqrt{\ln(10)}\right], \varphi \in \left[\frac{1}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\right] \right\},$$

gegeben. Skizzieren Sie die Menge P in das Koordinatensystem **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 4.A1**.

Hinweis: In Ihrer Skizze können Sie $\sqrt{\ln(2)} \approx 0.8$ und $\sqrt{\ln(10)} \approx 1.5$ verwenden.

Lösung:



(ii) Berechnen Sie $I = \iint_P e^{x^2+y^2}\, dA$. **Hinweis:** Rechnen Sie hier mit exakten Werten und nicht mit $\sqrt{\ln(2)} \approx 0.8$ und $\sqrt{\ln(10)} \approx 1.5$!

Lösung:

Mit der Parametrisierung berechnen wir $I = \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{7}{4}\pi} \int_{\sqrt{\ln 2}}^{\sqrt{\ln 10}} e^{(r^2)} r\, dr d\varphi$.

Es ist $\int_{\sqrt{\ln 2}}^{\sqrt{\ln 10}} e^{(r^2)} r\, dr = \frac{1}{2}\Big[e^{(r^2)}\Big|_{\sqrt{\ln 2}}^{\sqrt{\ln 10}} = 4$. Damit berechnen wir dann

$$I = 4\frac{6}{4}\pi = 6\pi \ .$$

Aufgabe 5

5.MC1 Für $b \in \mathbb{R}$ sei K_b das Vektorfeld mit $K_b(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + 4y + by^2 \\ 4x - 2xy + y^3 \end{pmatrix}$. Für welches b ist das Vektorfeld K_b konservativ?

(A) $b = \frac{1}{2}$

(B) $b = 1$

(C) **TRUE:** $b = -1$

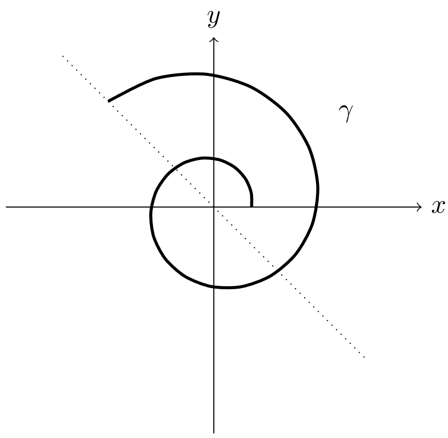
(D) $b = 2$

Lösung:

Wir schreiben $K = (P, Q)$. Dann ergibt sich $b = -1$ aus dem Kriterium $Q_x = P_y$, das ein konservatives Vektorfeld charakterisiert.

5.MC2 Sei $\gamma(t) = \left(e^t \cos(t), e^t \sin(t)\right)$ für $t \in \mathbb{R}$ gegeben.

Für welches Intervall I liefert $\gamma : I \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \gamma(t)$ die unten abgebildete Kurve? **Hinweis:** Bei der gepunkteten Linie handelt es sich um die Gerade $y = -x$.



(A) $I = \left[0, \dfrac{7\pi}{4}\right]$

(B) $I = \left[0, \dfrac{9\pi}{4}\right]$

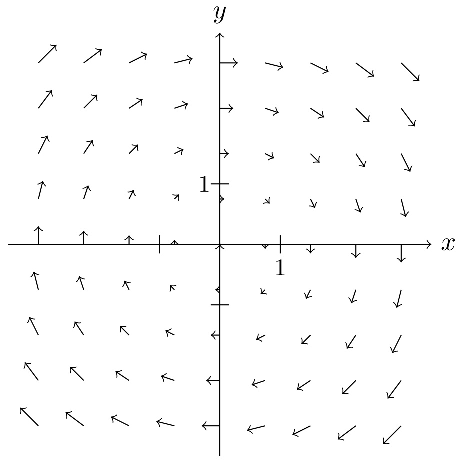
(C) **TRUE:** $I = \left[0, \dfrac{11\pi}{4}\right]$

(D) $I = \left[0, \dfrac{13\pi}{4}\right]$

Lösung:

Wir zählen die Umläufe. Bei $t = \dfrac{11}{4}\pi$ schneidet die Kurve γ die gepunktete Linie $y = -x$ zum dritten Mal.

5.MC3 Welches Vektorfeld K mit $K(x, y)$ passt zu dieser Abbildung?



(A) $K(x, y) = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$

(B) $K(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$

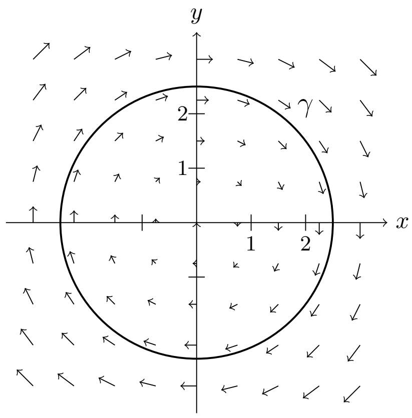
(C) $K(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$

(D) **TRUE:** $K(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$

Lösung:

Setze z.B. Punkte auf der x- oder y-Achse ein und beachte, welche Pfeilrichtungen passen.

5.MC4 In dem Vektorfeld aus **5.MC3** ist ein Kreis γ gegeben.



Sei $y' = Ay$ ein DGL-System mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ in Abhängigkeit von $c \in \mathbb{R}$. Für welchen Wert von c ist γ eine Lösungskurve des Systems?

(A) $c = -2$

(B) **TRUE:** $c = -1$

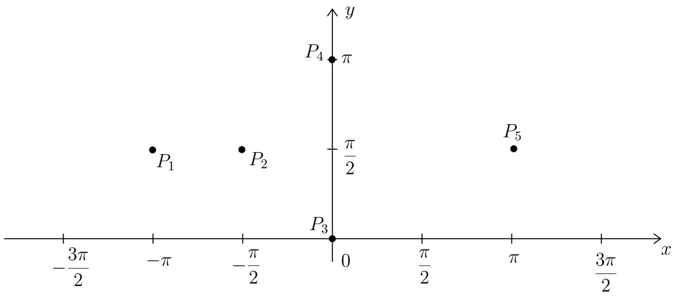
(C) $c = 1$

(D) $c = 2$

Lösung:

Die EW von A müssen rein imaginär sein. Wegen des Vektorfeldes kann es nur $c = -1$ sein.

5.MC5 Gegeben seien das Vektorfeld $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $K(x,y) = \begin{pmatrix} \sin(x-y)+3 \\ -\sin(x-y)+6 \end{pmatrix}$ und die Punkte $P_1, \ldots, P_5$ in der Ebene.



Sei γ eine Kurve mit Anfangspunkt P_1, die **über** P_2 **und** P_4 im Punkt P_5 endet.
Dann ist die Arbeit $\int_\gamma K \cdot d\gamma = \ldots$

(A) **TRUE:** 6π.
(B) 0.
(C) 3π.
(D) 4.

Lösung:

Durch genaues Hinschauen ist $k(x,y) = -\cos(x-y) + 3x + 6y + C$ mit C einer Integrationskonstante eine Potenentialfunktion. Die Arbeit der Kurve zwischen $P_1 = (-\pi, \frac{1}{2}\pi)$ und $P_5 = (\pi, \frac{1}{2}\pi)$ ist dann $k(P_5) - k(P_1)$. Wir berechnen also $k(P_5) = 6\pi + C$ und $k(P_1) = C$, also $k(P_5) - k(P_1) = 6\pi$.

5.MC6 Gegeben seien das Vektorfeld und die Punkte in der Ebene wie in **5.MC5** oben.

Sei γ eine Kurve mit Anfangspunkt P_1, die **über** P_2 **und** P_3 im Punkt P_5 endet. Dann ist die Arbeit $\int_\gamma K \cdot d\gamma = \ldots$

(A) **TRUE:** 6π.
(B) 0.
(C) 3π.
(D) 4.

Lösung:

Die Antwort ist identisch mit der in **5.MC5**, denn die Arbeit ist unabhängig vom Weg, da das Vektorfeld konservativ ist.

5.MC7 Sei K ein Vektorfeld mit $K(x,y) = \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ a\cdot xy + x \end{pmatrix}$.

Für welches a gibt $\oint_{\partial B} K \cdot d\gamma$ den Flächeninhalt von $B \subset \mathbb{R}^2$ an?

(A) $a = 0$

(B) $a = 1$

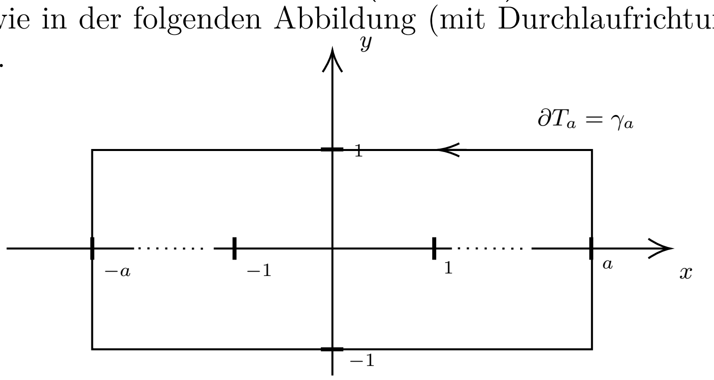
(C) **TRUE:** $a = 2$

(D) $a = 4$

Lösung:

Mit der Formel von Green ist $\oint_{\partial B} K \cdot d\gamma = \iint_B \left(\frac{\partial K_2}{\partial x} - \frac{\partial K_1}{\partial y}\right) dA = \iint_B (ay + 1 - 2y)\, dA\,.$ Damit das Integral rechts den Flächeninhalt angibt, muss der Integrand konstant 1 sein, also muss $1 = ay + 1 - 2y$ gelten. Es folgt $a = 2$.

5.MC8 Sei $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld $K(x,y) = \begin{pmatrix} -5x+2y \\ 2x+7y \end{pmatrix}$. Wir betrachten das Gebiet T_a mit Randkurve $\partial T_a = \gamma_a$ wie in der folgenden Abbildung (mit Durchlaufrichtung) dargestellt. Dabei hängt T_a von $a > 0$ ab.



Für welches a ist der Fluss von innen nach aussen durch die Randkurve gleich 40, das heisst: Berechnen Sie a, sodass $\oint_{\gamma_a} K \cdot n\, ds = 40$. Dabei ist n der äussere Normaleneinheitsvektor.

(A) $a = 8$

(B) **TRUE:** $a = 5$

(C) $a = 2$

(D) $a = 1$

Lösung:

Mit dem Satz von Gauss ist $\mathrm{div}(K) = -5 + 7 = 2$ konstant! Dann folgt

$$\oint_{\gamma_a} K \cdot n\, ds = \iint_T 2\, dA = 2 \cdot (\text{Fläche von } T) = 8a,$$

denn die Fläche von T ist 4a. Also ist $a = 5$

5.A1 [3 Punkte] Sei $\gamma(t) = \big(e^t\cos(t), e^t\sin(t)\big)$ für $t \in [0, \ln(2)]$ (vergleiche auch **5.MC2**) oben und das Vektorfeld K mit $K(x,y) = (-y, x)$ gegeben. Berechnen Sie das Arbeitsintegral $\int_\gamma K \cdot d\gamma$.

Lösung:

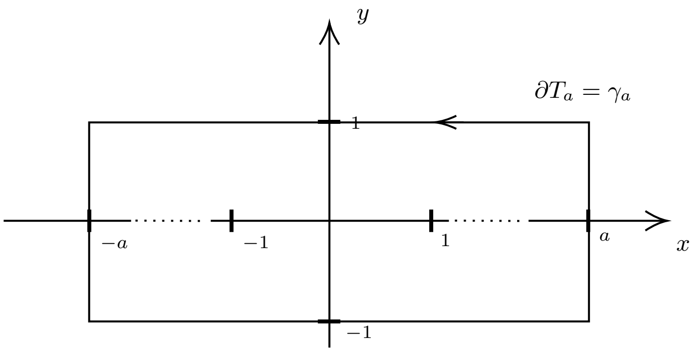
Wir berechnen zunächst $\gamma'(t) = \big(e^t\cos(t) - e^t\sin(t), e^t\sin(t) + e^t\cos(t)\big)$ dann folgt mit den Definitionen aus der Vorlesung

$$\int_\gamma K \cdot d\gamma = \int_0^{\ln(2)} K_\gamma \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_0^{\ln(2)} e^{2t}\big(\sin^2(t) + \cos^2(t)\big)\, dt = \int_0^{\ln(2)} e^{2t}\, dt.$$

Die Berechnung des letzten Integrals ist nun einfach, denn

$$\int_0^{\ln(2)} e^{2t}\, dt = \left[\frac{1}{2}e^{2t}\right|_{t=0}^{\ln(2)} = \frac{1}{2}\left(e^{2\ln(2)} - 1\right) = \frac{3}{2}$$

5.A2 [3 Punkte] Das Vektorfeld $K_b = \begin{pmatrix} 5x + \frac{4}{b}y \\ \frac{2}{b}x - 7y \end{pmatrix}$ hängt von einem reellen $b > 0$ ab. Sei T_a das Gebiet (wie in **5.MC8** oben).



Berechnen Sie das Arbeitsintegral $\oint_{\gamma_a} K_b \cdot d\gamma$ in Abhängigkeit von a und b.

Lösung:

Wir schreiben das Vektorfeld K_b in der Notation $K_b = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ mit

$$P(x,y) = 5x + \frac{4}{b}y \quad \text{und} \quad Q(x,y) = \frac{2}{b}x - 7y.$$

Laut der Formel von Green ist dann (mit der richtigen Orientierung)

$$\oint_{\gamma_a} K_b \cdot d\gamma = \iint_{T_a} (Q_x - P_y)\, dA = -\iint_{T_a} \frac{2}{b}\, dA,$$

und die rechte Seite ist unabhängig von x und y.
Damit ist $-\iint_{T_a} \frac{2}{b}\, dA = -\frac{2}{b}\iint_{T_a} 1\, dA = -\frac{2}{b}\cdot$ Flächeninhalt von $T_a = -8\frac{a}{b}$.