D–BIOL D–CHAB D–HEST

Prüfung Mathematik I/II

401-0292-00J (Jahreskurs)

Nachname

XX

Vorname

XX

Legi-Nr.

XX-000-000

Prüfungs-Nr.

000

Bitte noch nicht umblättern!

Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.

Aufgabe 1

1.MC1 Berechnen Sie die Ableitung von $f(x) = \sin(x) \cdot (1 - x)$.

(A) $f'(x) = \cos(x)(1 - x) - \sin(x)$
(B) $f'(x) = \cos(x)(x - 1) - \sin(x)$
(C) $f'(x) = \cos(x)(1 - x) + \sin(x)$
(D) $f'(x) = \cos(x)(x - 1) + \sin(x)$

1.MC2 Der Grenzwert $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{\sin(x) \cdot (1 - x)}$ ist gegeben durch

(A) 1.
(B) -1.
(C) 2.
(D) $\frac{1}{2}$.

1.MC3 Gegeben sei f mit $f(x) = \cos(2x)$. Wie lautet die Gleichung der Tangente $y = ax + b$ an den Graphen von f an der Stelle $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$?

(A) $y = \dfrac{\pi}{2} - 2x$
(B) $y = -\dfrac{\pi}{2}$
(C) $y = 1 + \dfrac{\pi}{2} - 2x$
(D) $y = 2x + \dfrac{\pi}{2}$

1.MC4 Sei h die Funktion mit $h(x) = (x - 2)(x^2 + x - 6) + x$.
Die Funktion hat die Fixpunkte $x_1 = 2$ und $x_2 = -3$. Bestimmen Sie den dritten Fixpunkt x_3.

(A) $x_3 = -2$
(B) $x_3 = 3$
(C) $x_3 = 2$
(D) $x_3 = -3$

1.MC5 Seien a und d Zahlen, und sei f die Funktion mit $f(x) = \dfrac{ax^3}{x+d}$.

Welches Paar a und d garantiert, dass $\widetilde{x} = \dfrac{1}{2}$ ein attraktiver Fixpunkt ist? Das heisst, jede Folge (x_n) mit $x_{n+1} = f(x_n)$ und x_0 nahe $\widetilde{x}$ konvergiert gegen $\widetilde{x}$.

(A) $a = \dfrac{2}{3}$ und $d = -\dfrac{1}{3}$

(B) $a = 1$ und $d = -\dfrac{1}{4}$

(C) $a = 1$ und $d = -\dfrac{3}{8}$

(D) $a = \dfrac{4}{7}$ und $d = -\dfrac{1}{7}$

1.MC6 Für welche obere Integralgrenze b gilt $\displaystyle\int_{-\pi}^{b} \frac{-\sin(x)}{\cos(x)+2} dx = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$?

Hinweis: Es gilt $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(|f(x)|) + C$.

(A) $b = 0$

(B) $b = \pi$

(C) $b = \dfrac{\pi}{4}$

(D) $b = \dfrac{2\pi}{3}$

1.MC7 Sei F eine Funktion definiert durch $F(x) = \displaystyle\int_2^x \frac{1}{t^2}\, dt$.

Welchen Wert hat $F(4)$?

(A) $F(4) = \dfrac{3}{16}$

(B) $F(4) = -\dfrac{3}{16}$

(C) $F(4) = \dfrac{1}{4}$

(D) $F(4) = -\dfrac{1}{4}$

1.MC8 Sei f eine Funktion mit $f(x) = e^{2x}$ und $T_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2$ als dem 2. Taylor-Polynom **an der Stelle** $x_0 = 1$. Bestimmen Sie den Koeffizienten a_2.

(A) $a_2 = 2e$

(B) $a_2 = 4e$

(C) $a_2 = 2e^2$

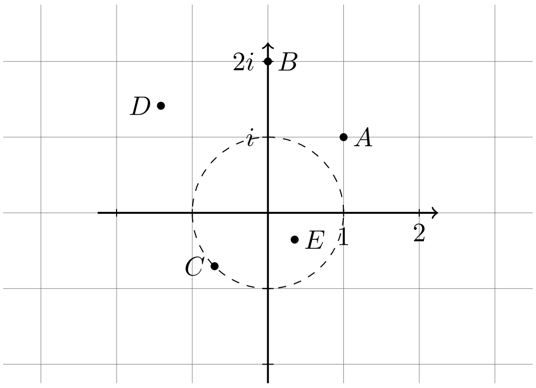
(D) $a_2 = 4e^2$

Aufgabe 2

2.MC1 Welchen Imaginärteil hat die komplexe Zahl $w = 2e^{-\frac{3\pi}{4}i}$?

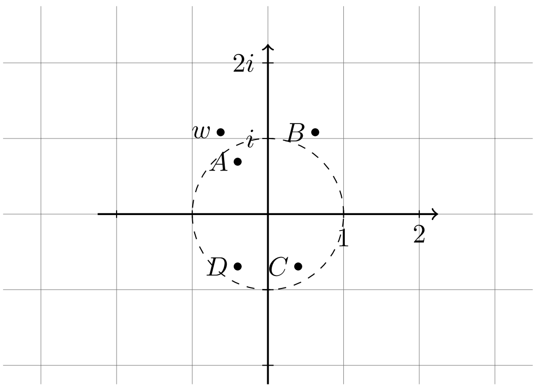
(A) $\mathrm{Im}(w) = -\sqrt{2}$
(B) $\mathrm{Im}(w) = \sqrt{2}$
(C) $\mathrm{Im}(w) = \sqrt{3}$
(D) $\mathrm{Im}(w) = -\sqrt{3}$

2.MC2 Betrachten Sie die Zahlen A bis E in der komplexen Zahlenebene. Welche der folgenden Gleichungen passt dazu?



(A) $BC^2 = D$
(B) $A^2 = B$
(C) $D^{-1} = E$
(D) $EC^{-1} = A$

2.MC3 Betrachten Sie die Zahlen A bis D und w in der komplexen Zahlenebene. Welche entspricht der komplexen Zahl $\overline{w}^{-1}$?



(A) A
(B) B
(C) C
(D) D

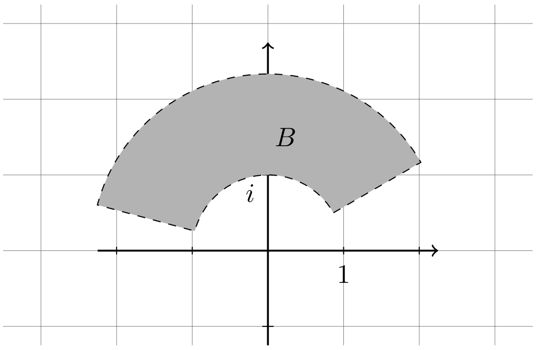
2.MC4 Es ist $\left(6\sqrt{2}(1+i)\right)^3 = \ldots$

(A) $6^3 e^{\frac{-3\pi}{4}i}$.
(B) $2^6 3^3 \sqrt{2}(1+i)$.
(C) $2^5 3^3(-\sqrt{2} + i\sqrt{2})$.
(D) $6^3 2^{3/2}$.

2.MC5 Die Skizze unten zeigt ein Gebiet B (Rand **nicht** enthalten) in der komplexen Ebene mit

$$B = \left\{ z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \;\middle|\; 1 < r < \frac{7}{3}, \frac{\pi}{6} < \varphi < \frac{11\pi}{12} \right\}.$$

Seien $z_1 = 2e^{\frac{\pi}{2}i}$ und $z_2 = -1 - i$. Welche der folgenden Zahlen liegt in B?



(A) $\dfrac{z_1}{z_2}$

(B) $z_1 \cdot z_2$

(C) $z_1 + z_2$

(D) $z_2 - z_1$

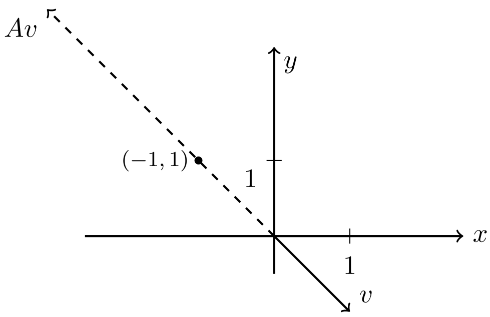
2.MC6 Welche Matrix A passt zu folgendem Bild ?

(A) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

(B) $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

(C) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

(D) $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$



2.MC7 Sei $C_b = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ b^3 & -3 & -4 \\ b^4 & b^2 & 2 \end{pmatrix}$. Für welchen Wert von $b \in \mathbb{R}$ hat C_b nur reelle Eigenwerte?

(A) $b = -2$

(B) $b = -\dfrac{1}{16}$

(C) $b = 2$

(D) $b = \dfrac{21}{16}$

2.MC8 Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} -7 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 2 \\ \frac{1}{3} & 3 & -3 \end{pmatrix}$. Welcher der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor von A^3?

(A) $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(B) $-2^5\sqrt{\pi}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(C) $3^7 \sin(4)\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

(D) $-2^7\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

2.A1 [4 Punkte] Gegeben sei die Matrix $D_b = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ -2 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & b \end{pmatrix}$ mit $b \in \mathbb{R}$.

(i) Berechnen Sie die Determinante von D_b in Abhängigkeit von b.

(ii) Wir betrachten das lineare Gleichungssystem $D_b \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ z \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie b und z so, dass sowohl $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$ als auch $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ eine Lösung x des Gleichungssystems sind.

(iii) Sei $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Für welche $b \in \mathbb{R}$ ist das Produkt D_bF invertierbar?

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 2.A1**.

Aufgabe 3

3.MC1 Für welches a ist die Funktion $x \mapsto y(x) = e^{ax} - \frac{1}{2}$ eine Lösung der DGL $y' = ay + 2$?

(A) $a = -\frac{1}{2}$

(B) $a = \frac{1}{2}$

(C) $a = 2$

(D) $a = 4$

3.MC2 Sei $y(x) = C \cdot e^{2x} - 3$ die Lösung einer Differentialgleichung mit $y(\ln(3)) = 6$.
Bestimmen Sie den Wert $y_0 = y\,(0)$.

(A) $y(0) = -4$

(B) $y(0) = 3$

(C) $y(0) = -2$

(D) $y(0) = -\frac{8}{3}$

3.MC3 Gegeben sei das Anfangswertproblem mit $y'(x) = (5 - y(x)) \cdot (3 + y(x))$ und $y(0) = y_0$.
Für welchen Wert y_0 ist die Lösungskurve streng monoton wachsend?

(A) $y_0 = 4$

(B) $y_0 = -3$

(C) $y_0 = 7$

(D) $y_0 = -4$

3.MC4 Sei $y'(x) = (3 - y(x))(2 - y(x))(y(x) + 3)$. Für die Lösung y mit $y(0) = 1$ gilt $\lim_{x \to \infty} y(x) = \ldots$

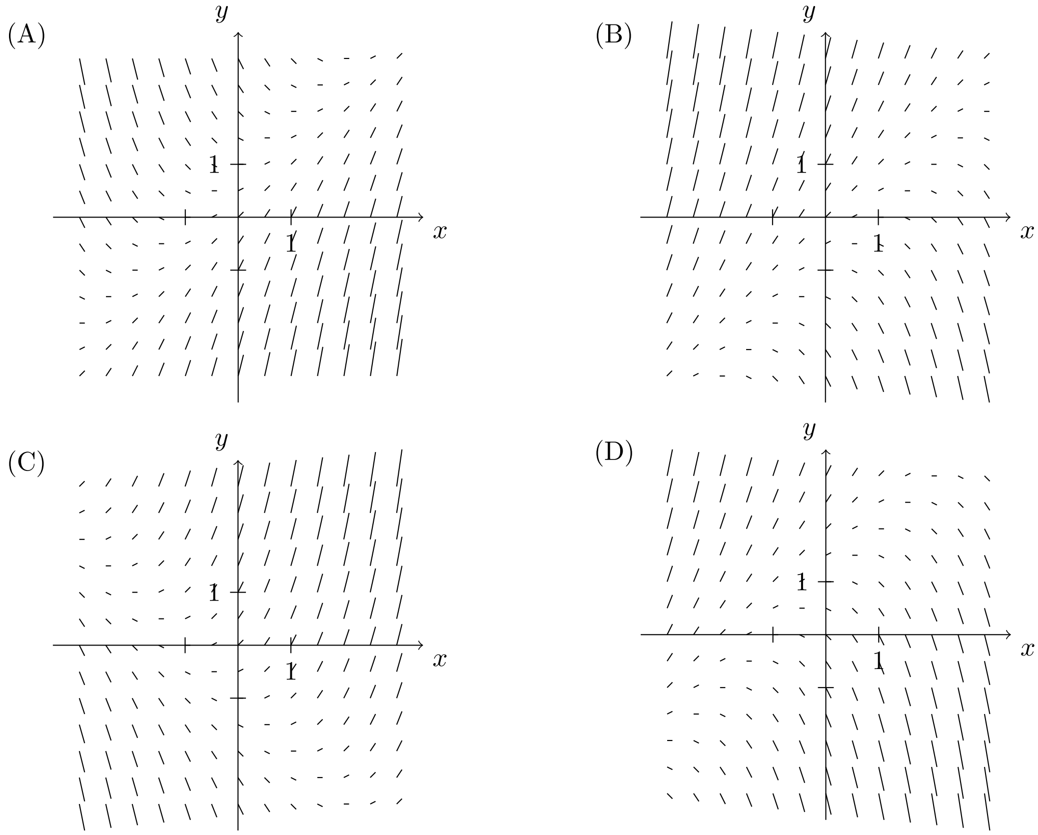
(A) -3.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 0.

3.MC5 Welches Richtungsfeld passt zu $y'(x) = y - x + 1$?



3.MC6 Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 5 & \alpha \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, mit $\alpha \in \mathbb{R}$, definiert das DGL-System $y' = Ay$. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ soll gelten, dass

$$\left\{ t \to y(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Lösung dieses Systems ist. Für welche Wahl von λ und α stimmt das?

(A) $\lambda = -4$ und $\alpha = 3$

(B) $\lambda = -4$ und $\alpha = -3$

(C) $\lambda = 4$ und $\alpha = -3$

(D) $\lambda = 4$ und $\alpha = 3$

3.MC7 Sei $y' = Ay$ das DGL-System mit $A = \begin{pmatrix} 6 & \beta \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Für welchen Wert von β hat das System sicher eine stationäre Lösung $y_\infty \neq 0$?

(A) $\beta = 9$

(B) $\beta = -2$

(C) $\beta = 2$

(D) $\beta = -9$

3.MC8 Für $a \in \mathbb{R}$ sei $y''(x) + a \cdot y'(x) + 4y(x) = 0$.

Für welches a definiert $y(x) = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{-4x}$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung?

(A) $a = -5$

(B) $a = 5$

(C) $a = 9$

(D) $a = -9$

3.A1 [6 Punkte] Wir betrachten die Differentialgleichung $y'(x) = -3y(x) - (2x-3)e^{-x^2}$.

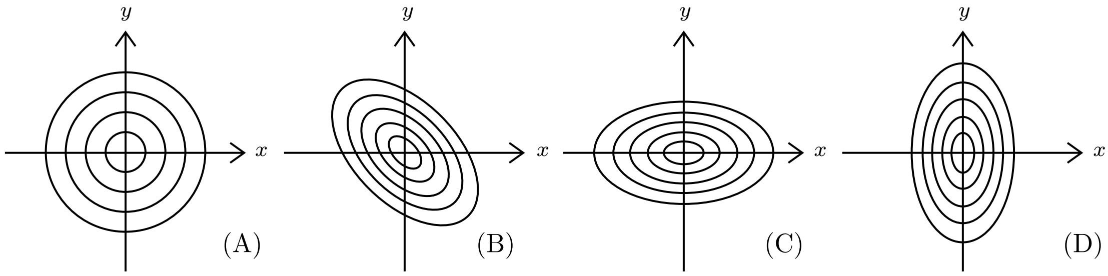
(i) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung durch Variation der Konstanten.
Hinweis: Es gilt $\int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)} + C$.

(ii) Sei $y(0) = 3$. Bestimmen Sie die Lösung das Anfangwertproblems und $\lim\limits_{x\to\infty} y(x)$.

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 3.A1**.

Aufgabe 4

4.MC1 Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = x^2 + 2y^2$. Welches der folgenden Bilder zeigt Niveaulinien (oder Höhenlinien) der Funktion f?



4.MC2 Seien $a \in \mathbb{R}$ und die Funktion $g_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g_a(x,y) = 4 + x(ax-3) + (4a-y)^2$. Für welches a ist $(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{a^2}, \frac{8}{3}\right)$ ein kritischer Punkt von g_a?

(A) $a = -3$

(B) $a = \frac{2}{3}$

(C) $a = 4$

(D) $a = -\frac{2}{3}$

4.MC3 Für die Funktion g_a aus Aufgabenteil **4.MC2** sei nun $a = 2$:

Für welchen Wert von b beschreibt der Graph der Funktion $l : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $l(x,y) = 24 + 5x + by$ die Tangentialebene von g_2 an der Stelle $(x_0, y_0) = (2, 6)$?

(A) $b = 5$

(B) $b = -2$

(C) $b = 12$

(D) $b = -4$

4.MC4 Die Tangentialebene aus Aufgabenteil **4.MC3** schneidet die Gerade $\{(1, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$ in einem Punkt. Bestimmen Sie die z-Koordinate dieses Schnittpunktes. **Hinweis:** Die Antwort hängt **nicht** von b in Aufgabenteil **4.MC3** ab.

(A) 29

(B) 26

(C) 60

(D) 0

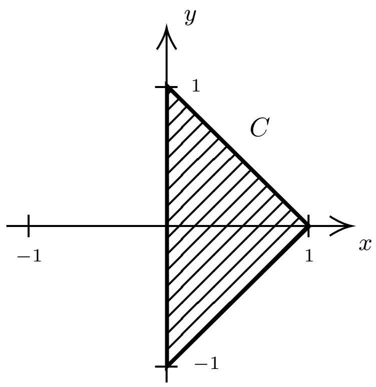
4.MC5 Sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $h(x,y) = x^2 - 3xy + y^3$. Welcher der folgenden Punkte liegt auf der Niveaukurve zur Höhe 9?

(A) $(x,y) = (-1,1)$
(B) $(x,y) = (2,-1)$
(C) $(x,y) = (-1,-1)$
(D) $(x,y) = (1,-2)$

4.MC6 Sei h die Funktion aus Aufgabenteil **4.MC5**. Sei γ die Niveaukurve von h in der (x,y)-Ebene, auf der $P = (1,0)$ liegt. Welche Steigung hat die Tangente an γ in P?

(A) $-\frac{2}{3}$
(B) $-\frac{3}{2}$
(C) $\frac{2}{3}$
(D) $\frac{3}{2}$

4.MC7 Gegeben sei das Gebiet C:



Welcher Integralausdruck berechnet den Flächeninhalt von C?

(A) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x-1}^{1-x} dy\,dx$
(B) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-y} dx\,dy$
(C) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_0^1 dy\,dx$
(D) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{y-1}^{1-y} dx\,dy$

4.MC8 Sei $\widetilde{C}$ nur die obere Hälfte von C aus Aufgabenteil **4.MC7**, das heisst, es muss $y \geq 0$ sein. Für welches $K \in \mathbb{R}$ ist $\displaystyle\iint_{\widetilde{C}} (2y + K)\,dA = \frac{11}{6}$?

(A) $K = 1$
(B) $K = 2$
(C) $K = 3$
(D) $K = 4$

4.A1 [4 Punkte]

(i) Sei die Menge

$$P = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x,y) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)), r \in \left[\sqrt{\ln(2)}, \sqrt{\ln(10)}\right], \varphi \in \left[\frac{1}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\right] \right\},$$

gegeben. Skizzieren Sie die Menge P in das Koordinatensystem **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 4.A1**.

Hinweis: In Ihrer Skizze können Sie $\sqrt{\ln(2)} \approx 0.8$ und $\sqrt{\ln(10)} \approx 1.5$ verwenden.

(ii) Berechnen Sie $I = \iint_P e^{x^2+y^2}\, dA$. **Hinweis:** Rechnen Sie hier mit exakten Werten und nicht mit $\sqrt{\ln(2)} \approx 0.8$ und $\sqrt{\ln(10)} \approx 1.5$!

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 4.A1**.

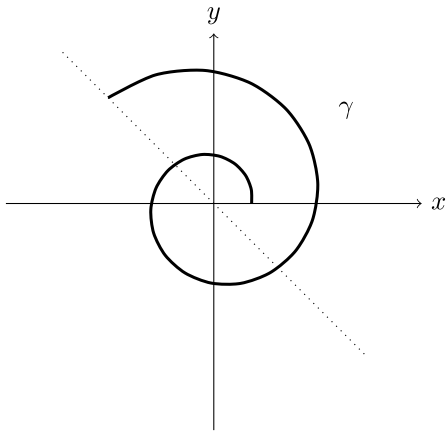
Aufgabe 5

5.MC1 Für $b \in \mathbb{R}$ sei K_b das Vektorfeld mit $K_b(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + 4y + by^2 \\ 4x - 2xy + y^3 \end{pmatrix}$. Für welches b ist das Vektorfeld K_b konservativ?

(A) $b = \frac{1}{2}$
(B) $b = 1$
(C) $b = -1$
(D) $b = 2$

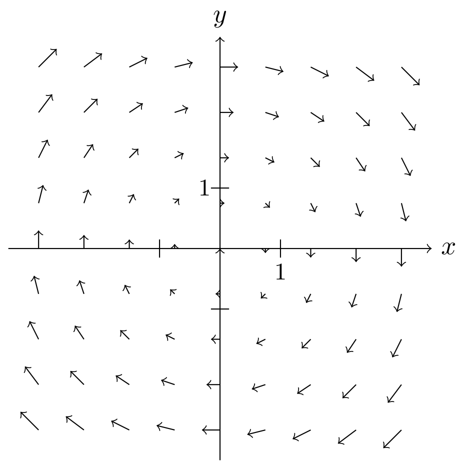
5.MC2 Sei $\gamma(t) = \left(e^t \cos(t), e^t \sin(t)\right)$ für $t \in \mathbb{R}$ gegeben.

Für welches Intervall I liefert $\gamma : I \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \gamma(t)$ die unten abgebildete Kurve? **Hinweis:** Bei der gepunkteten Linie handelt es sich um die Gerade $y = -x$.



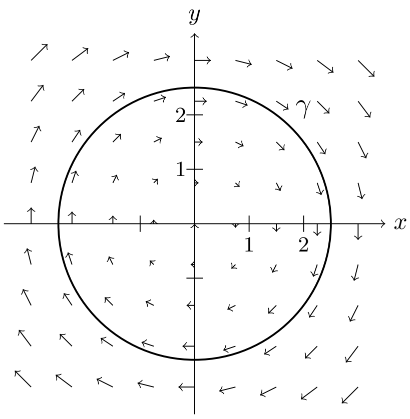
(A) $I = \left[0,\ \frac{7\pi}{4}\right]$
(B) $I = \left[0,\ \frac{9\pi}{4}\right]$
(C) $I = \left[0,\ \frac{11\pi}{4}\right]$
(D) $I = \left[0,\ \frac{13\pi}{4}\right]$

5.MC3 Welches Vektorfeld K mit $K(x,y)$ passt zu dieser Abbildung?



(A) $K(x,y) = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$
(B) $K(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$
(C) $K(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$
(D) $K(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$

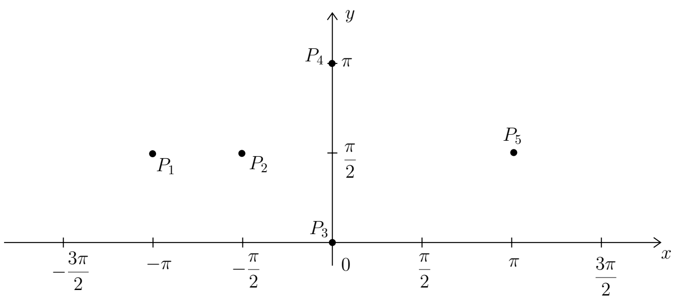
5.MC4 In dem Vektorfeld aus **5.MC3** ist ein Kreis γ gegeben.



Sei $y' = Ay$ ein DGL-System mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ in Abhängigkeit von $c \in \mathbb{R}$. Für welchen Wert von c ist γ eine Lösungskurve des Systems?

(A) $c = -2$
(B) $c = -1$
(C) $c = 1$
(D) $c = 2$

5.MC5 Gegeben seien das Vektorfeld $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $K(x, y) = \begin{pmatrix} \sin(x-y) + 3 \\ -\sin(x-y) + 6 \end{pmatrix}$ und die Punkte $P_1, \ldots, P_5$ in der Ebene.



Sei γ eine Kurve mit Anfangspunkt P_1, die **über** P_2 **und** P_4 im Punkt P_5 endet.
Dann ist die Arbeit $\int_\gamma K \cdot d\gamma = \ldots$

(A) 6π.
(B) 0.
(C) 3π.
(D) 4.

5.MC6 Gegeben seien das Vektorfeld und die Punkte in der Ebene wie in **5.MC5** oben.

Sei γ eine Kurve mit Anfangspunkt P_1, die **über** P_2 **und** P_3 im Punkt P_5 endet. Dann ist die Arbeit $\int_\gamma K \cdot d\gamma = \dots$

(A) 6π.

(B) 0.

(C) 3π.

(D) 4.

5.MC7 Sei K ein Vektorfeld mit $K(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ a \cdot xy + x \end{pmatrix}$.

Für welches a gibt $\oint_{\partial B} K \cdot d\gamma$ den Flächeninhalt von $B \subset \mathbb{R}^2$ an?

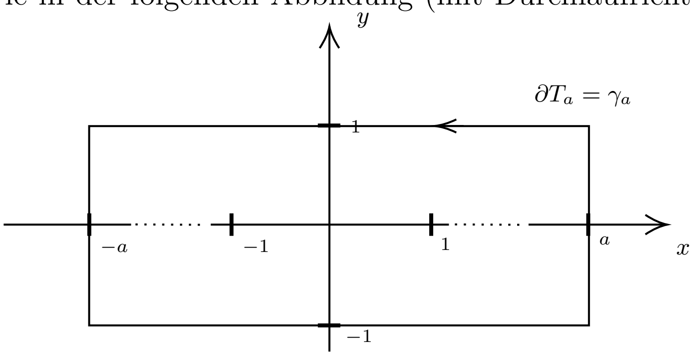
(A) $a = 0$

(B) $a = 1$

(C) $a = 2$

(D) $a = 4$

5.MC8 Sei $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld $K(x,y) = \begin{pmatrix} -5x + 2y \\ 2x + 7y \end{pmatrix}$. Wir betrachten das Gebiet T_a mit Randkurve $\partial T_a = \gamma_a$ wie in der folgenden Abbildung (mit Durchlaufrichtung) dargestellt. Dabei hängt T_a von $a > 0$ ab.



Für welches a ist der Fluss von innen nach aussen durch die Randkurve gleich 40, das heisst: Berechnen Sie a, sodass $\oint_{\gamma_a} K \cdot n \, ds = 40$. Dabei ist n der äussere Normaleneinheitsvektor.

(A) $a = 8$

(B) $a = 5$

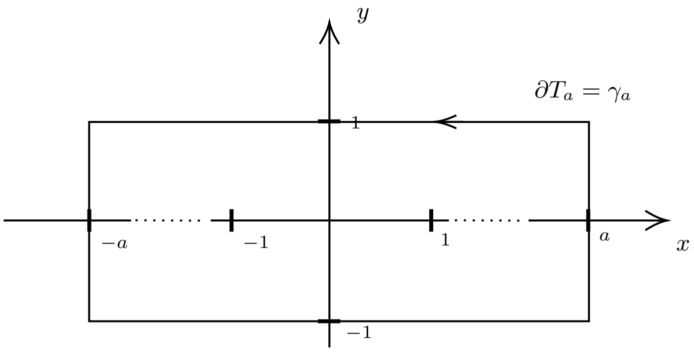
(C) $a = 2$

(D) $a = 1$

5.A1 [3 Punkte] Sei $\gamma(t) = \big(e^t \cos(t), e^t \sin(t)\big)$ für $t \in [0, \ln(2)]$ (vergleiche auch **5.MC2**) oben und das Vektorfeld K mit $K(x,y) = (-y, x)$ gegeben. Berechnen Sie das Arbeitsintegral $\int_\gamma K \cdot d\gamma$.

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 5.A1**.

5.A2 [3 Punkte] Das Vektorfeld $K_b = \begin{pmatrix} 5x + \frac{4}{b}y \\ \frac{2}{b}x - 7y \end{pmatrix}$ hängt von einem reellen $b > 0$ ab. Sei T_a das Gebiet (wie in **5.MC8** oben).



Berechnen Sie das Arbeitsintegral $\oint_{\gamma_a} K_b \cdot d\gamma$ in Abhängigkeit von a und b.

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 5.A2**.