D–BIOL D–CHAB D–HEST

Prüfung Mathematik I/II

401-0292-00L

Lösungsvorschlag

Multiple Choice

1. Aufgabe **[40 Punkte]**

MC1. Ergebnis: (B).

Die Funktion $\sqrt[4]{x}$ ist nur für $x \geq 0$ definiert. Das bedeutet, dass $g(x) = \sqrt[4]{\log(x)}$ nur für $\log(x) \geq 0$ definiert ist. Zuletzt gilt

$$\log(x) \geq 0 \iff x \geq 1.$$

Der maximale Definitionsbereich der Funktion $g(x) = \sqrt[4]{\log(x)}$ ist daher $[1, \infty)$.

MC2. Ergebnis: (C).

Da $x > 0$ können wir die logarithmische Ableitung anwenden. Auf beiden Seiten von $f(x) = x^x$ bilden wir den Logarithmus und leiten ab, um zu erhalten

$$[\log(f(x))]' = \frac{f'(x)}{f(x)},$$
$$[\log(x^x)]' = [x \log(x)]' = \log(x) + 1.$$

Gleichsetzen und multiplizieren mit $f(x) = x^x$ liefert

$$f'(x) = x^x (\log(x) + 1).$$

MC3. Ergebnis: (C).

Wir sind in der Situation $\frac{0}{0}$ und möchten die Regel von de l'Hôpital anwenden:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x - \sin(x)\cos(x)}{\sin(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{2 - (\cos^2(x) - \sin^2(x))}{\cos(x)} = \frac{2 - (1 - 0)}{1} = 1.$$

MC4. Ergebnis: (D)

Beide Reihen divergieren, da

$$\lim_{n \to \infty} (-1)^n \neq 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n \to \infty} n(-1)^n \neq 0.$$

MC5. Ergebnis: (A).

Es gilt

$$\int \frac{x}{x^2 + 1}\, dx = \frac{\log(x^2 + 1)}{2} + C,$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$. Daher erhalten wir

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1}\, dx = \left[\frac{\log(x^2 + 1)}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(\log(2) - \log(1)) = \frac{\log(2)}{2}.$$

MC6. **Ergebnis:** (C).

Der Satz der partiellen Integration lautet

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx.$$

Wir setzen $f(x) = \cos(x)$ und $g'(x) = \cos(x)$ ein. Da $f'(x) = -\sin(x)$ und $g(x) = \int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$ für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$, erhalten wir (für $C = 0$)

$$\int \cos^2(x)\,dx = \cos(x)\sin(x) - \int \big(-\sin(x)\sin(x)\big)\,dx = \cos(x)\sin(x) + \int \sin^2(x)\,dx.$$

MC7. **Ergebnis:** (C)

Da $f' \geq 0$ und $f'' \geq 0$ ist die Funktion f wachsend und konvex. Wir erhalten somit

$$a < b \implies f(a) \leq f(b).$$

Es ist klar, dass es nicht notwendigerweise einen maximalen Punkt geben muss, indem man zum Beispiel $f(x) = \exp(x)$ wählt. Das gleiche Gegenbeispiel zeigt, dass f nicht unbedingt konkav und monoton fallend sein muss.

MC8. **Ergebnis:** (B).

Mögliche Lösungen sind:

(a) Wir haben $|1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. Daher gilt

$$(1+i) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\big(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)\big).$$

Somit ergibt sich

$$(1+i)\big(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)\big) = \sqrt{2}\big(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)\big),$$

was sofort $|z| = \sqrt{2}$ liefert.

(b) Alternativ gilt

$$\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Wir können dann direkt berechnen

$$(1+i)\Big(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = i\frac{2}{\sqrt{2}} = i\sqrt{2},$$

was zum gleichen Ergebnis führt.

(c) Eine weitere Lösung besteht darin zu erkennen, dass

$$\big|(1+i)\big(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)\big)\big| = |1+i| \cdot \big|\big(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)\big)\big| = |1+i| \cdot 1 = \sqrt{2}.$$

Lineare Algebra:

MC9. **Ergebnis:** (C).

Diese Vektoren sind linear abhängig, genau dann wenn die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -3 \\ 3 & -\lambda & -1 \\ -4 & \lambda & \lambda \end{pmatrix}$$

verschwindet. Diese Determinante lautet

$$\begin{aligned} \det A &= -\lambda^2 + 4\lambda - 9\lambda + 12\lambda + \lambda - 3\lambda^2 \\ &= -4\lambda^2 + 8\lambda \\ &= 4\lambda(-\lambda + 2). \end{aligned}$$

Das heisst, dass die Vektoren v_1, v_2 und v_3 linear abhängig sind, genau dann wenn $\lambda = 0$ oder $\lambda = 2$.

MC10. **Ergebnis:** (A).

Die Zeilen (oder Spalten) von A sind linear abhängig, das heisst

$$\det A = 0.$$

MC11. **Ergebnis:** (B).

Das charakteristische Polynom von A ist

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \lambda^2(1-\lambda) - (1-\lambda) \\ &= (1-\lambda)[\lambda^2 - 1] \\ &= -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1). \end{aligned}$$

MC12. **Ergebnis:** (A).

Der Vektor $v = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor von A, daher ist v auch ein Eigenvektor von A^3.

MC13. **Ergebnis:** (D).

Es gilt

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -1.5 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3+Z_1} \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & -1.5 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_3+1.5Z_2]{(-0.5)\cdot Z_2} \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = z, \\ y = -z - 0.5, \\ z \text{ beliebig}, \end{cases}$$

Die Lösung des Gleichungssystem kann wie folgt geschrieben werden

$$x = \begin{pmatrix} t \\ -t - 0.5 \\ t \end{pmatrix}, \text{ für } t \in \mathbb{R}.$$

MC14. **Ergebnis:** (D).

Die Eigenwerte sind Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\det A_b = (6-\lambda)(1-\lambda) - (-1)\cdot b = 6 - 7\lambda + \lambda^2 + b = \lambda^2 - 7\lambda + 6 + b.$$

Die Eigenwerte folgen mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen. Somit ist

$$\lambda_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4(6+b)}}{2}.$$

Um komplexe Eigenwerte zu erhalten, muss der Ausdruck unter der Wurzel negativ sein, also bleibt nur $b = 10$.

Gewöhnliche Differentialgleichungen:

MC15. **Ergebnis:** (C).

Die homogene Differentialgleichung lautet

$$y''(x) + 9y(x) = 0.$$

Dies ist eine Schwingungsgleichung und die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung kennen wir aus der Vorlesung, nämlich

$$y(x) = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x),$$

für Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Multivariate Funktionen:

MC16. Ergebnis: (D).

Wir schreiben $z = f(x, y) = x^2 + y^3 - 1$. Wir wissen, dass $\partial_x f = 2x$ und $\partial_y f = 3y^2$. Somit lautet die Tangentialebene in $(2, 1, 4)$

$$z = 4 + 4(x - 2) + 3(y - 1).$$

MC17. Ergebnis: (A).

Die Gerade und die Parabel schneiden sich bei $x = -2$ und bei $x = 1$. Damit ist der gesuchte Flächeninhalt

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{1} -x + 2 - x^2 \, dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_{-2}^{1} = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Mehrdimensionale Integrale:

MC18. Ergebnis: (D).

Es gilt

$$\begin{aligned} \iint_V 1 \, dx \, dy &= \int_0^5 \int_0^{e^{1+x}} 1 \, dy \, dx \\ &= \int_0^5 [y]_{y=0}^{y=e^{1+x}} \, dy \, dx \\ &= \int_0^5 e^{1+x} \, dx. \end{aligned}$$

Ferner gilt

$$\int_0^5 e^{1+x} \, dx = \left[e^{1+x} \right]_0^5 = e^6 - e.$$

Linienintegrale und Oberflächenintegrale:

MC19. **Ergebnis:** (D).

Es gilt

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} -\pi t \\ \pi(1-t) \end{pmatrix},$$

für $t \in [0,1]$. Nach Definition des Wegintegrals gilt

$$\begin{aligned} \int_\gamma y\,dx + 2\,dy &= \int_0^1 \pi(1-t)\cdot(-\pi) + 2\cdot(-\pi)\,dt \\ &= \int_0^1 -\pi^2 + \pi^2 t - 2\pi\,dt \\ &= \left[(-\pi^2 - 2\pi)t + \frac{\pi^2}{2}t^2\right]_0^1 dt \\ &= -\pi^2 - 2\pi + \frac{\pi^2}{2} = -\frac{\pi^2}{2} - 2\pi. \end{aligned}$$

MC20. **Ergebnis:** (A).

Es gilt

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^3 \end{pmatrix},$$

für $t \in [-2,1]$. Nach Definition des Wegintegrals gilt

$$\begin{aligned} \int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_{-2}^1 \begin{pmatrix} 4t+4t^3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3t^2 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_{-2}^1 4t + 6t^2 + 4t^3\,dt \\ &= \left[2t^2 + 2t^3 + t^4\right]_{-2}^1 \\ &= 2+2+1-8+16-16 = -3. \end{aligned}$$

Aufgaben

2. Aufgabe **[4 Punkte]**

(a) **[1 Punkt]** Finden Sie das Taylor Polynom erster Ordnung der Funktion

$$f(x) = e^x + \log(x), \quad x > 0,$$

am Punkt $x_0 = 1$.

Lösung:

Das Taylor Polynom erster Ordnung der Funktion f an der Stelle $x_0 = 1$ lautet $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. In diesem Fall gilt

$$f'(x) = e^x + \frac{1}{x},\ x > 0.$$

Daher ist das Taylor Polynom erster Ordnung gleich

$$f(1) + f'(1)(x-1) = e + (e+1)(x-1).$$

(b) **[3 Punkte]** Für welche Werte $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die folgende Reihe?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (2x)^n.$$

Hinweis: Sie können Resultate zu Potenzreihen verwenden.

Lösung:

Es gilt

$$\frac{(-1)^n}{n}(2x^n) = \frac{(-2)^n}{n} x^n.$$

Somit ist die Reihe eine Potenzreihe. Das Zentrum dieser Reihe ist $x_0 = 0$ und der Konvergenzradius dieser Reihe ist

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-2)^n/n}{(-2)^{n+1}/(n+1)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{(-2)} \cdot \frac{n+1}{n} \right| = \frac{1}{2}.$$

Alternativ kann man auch den Konvergenzradius mit

$$\frac{1}{r} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(-2)^n}{n} \right|} = 2 \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 2,$$

berechnen. Wir erhalten somit, dass die Reihe für $x \in (-1/2, 1/2)$ konvergiert und für $x \in (-\infty, -1/2) \cup (1/2, \infty)$ divergiert. Es bleibt zu überprüfen, ob die Fälle $x = -1/2$ und $x = 1/2$ konvergent oder divergent sind. Sei $x = -1/2$, dann erhalten wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(2 \cdot \frac{-1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

was divergent ist. Sei nun $x = 1/2$, dann erhalten wir ähnlich

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(2 \cdot \frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

was konvergent ist. Die Reihe konvergiert daher für

$$x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

3. Aufgabe [4 Punkte]

(a) **[2 Punkte]** Sei

$$z = 3 + 3i.$$

Finden Sie die Polar-Koordinaten von z und berechnen Sie den Wert von

$$\sqrt{\frac{z \cdot \bar{z}}{2}}.$$

Lösung:

Es gilt

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{2 \cdot 9} = 3\sqrt{2}.$$

Daher gilt

$$z = 3 + 3i = 3\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 3\sqrt{2}\,(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)).$$

Abschliessend ergibt sich

$$\sqrt{\frac{z \cdot \bar{z}}{2}} = \sqrt{\frac{18}{2}} = \sqrt{9} = 3.$$

(b) **[2 Punkte]** Sei $x \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ und $\omega \in \mathbb{C}$, sodass

$$\omega = \frac{ix + 2}{x - i}.$$

Berechnen Sie den Wert von $(x - i)(\omega - i)$ und vereinfachen Sie ihn so weit wie möglich.

Lösung:

Wir erhalten durch direkte Berechnungen

$$\omega - i = \frac{ix + 2}{x - i} - i = \frac{ix + 2 - i(x - i)}{x - i} = \frac{ix + 2 - ix - 1}{x - i} = \frac{1}{x - i}.$$

Folglich ergibt sich

$$(x - i)(\omega - i) = (x - i)\frac{1}{x - i} = 1.$$

4. Aufgabe **[4 Punkte]**

Betrachten Sie die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \mu & 1 & 2 \\ 2 & \mu & 1 \end{pmatrix}$$

(a) **[1 Punkt]** Sei $\mu = 0$. Berechnen Sie den reellen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ von A.

Lösung:

Sei $\mu = 0$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, wir erhalten

$$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom lautet

$$\det(A - \lambda I_3) = (1-\lambda)^3 + 8.$$

Der einzige reelle Eigenwert von A ist somit $\lambda = 3$.

(b) **[3 Punkte]** Sei $\mu = 2$. Berechnen Sie die Inverse von A.

Lösung:

Sei $\mu = 2$, wir erhalten

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Inverse von A ist gegeben durch

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} & \bar{a}_{31} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & \bar{a}_{32} \\ \bar{a}_{13} & \bar{a}_{23} & \bar{a}_{33} \end{pmatrix},$$

wobei $\bar{a}_{ij}$ die Cofaktoren sind,

$$\bar{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{i,j},$$

und $A_{i,j}$ die Untermatrix von A ist, die durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht. Die Inverse von A ist somit

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

5. Aufgabe **[4 Punkte]**

(a) **[1 Punkt]** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$y''(x) + 3y'(x) = 0.$$

Lösung:

Das charakteristische Polynom der homogenen Differentialgleichung $y'' + 3y' = 0$ lautet

$$\lambda^2 + 3\lambda = \lambda(\lambda + 3),$$

mit Nullstellen 0 und -3. Die allgemeine Lösung y_0 der homogenen Differentialgleichung kennen wir aus der Vorlesung, nämlich

$$y_0(x) = C_1 \exp((-3) \cdot x) + C_2 \exp(0 \cdot x) = C_1 \exp(-3x) + C_2.$$

für Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

(b) [**3 Punkte**] Finden Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y''(x) + 3y'(x) = 18\sin(3x) \text{ mit } y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

Lösung:

Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung. Das charakteristische Polynom der homogenen Differentialgleichung $y'' + 3y' = 0$ lautet

$$\lambda^2 + 3\lambda = \lambda(\lambda + 3),$$

mit Nullstellen 0 und -3. Da $3i$ keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, machen wir für eine partikuläre Lösung den Ansatz

$$y_p(x) = A\sin(3x) + B\cos(3x).$$

Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung wird zu

$$18\sin(3x) = y_p''(x) + 3y_p'(x) = (-9A - 9B)\sin(3x) + (9A - 9B)\cos(3x).$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt $A = -1$ und $B = -1$ und eine partikuläre Lösung ist gegeben durch

$$y_p(x) = -\sin(3x) - \cos(3x).$$

Die allgemeine Lösung y_0 der homogenen Differentialgleichung ist

$$y_0(x) = C_1\exp((-3)\cdot x) + C_2\exp(0\cdot x) = C_1\exp(-3x) + C_2,$$

für Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist daher

$$y(x) = y_p(x) + y_0(x) = -\sin(3x) - \cos(3x) + C_1\exp(-3x) + C_2,$$

für Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Die Anfangsbedingungen ergeben $1 = y(0) = -1 + C_1 + C_2$ und $0 = y'(0) = -3 - 3C_1$. Die Lösung des Anfangswertproblems ist somit

$$y(x) = -\sin(3x) - \cos(3x) - \exp(-3x) + 3.$$

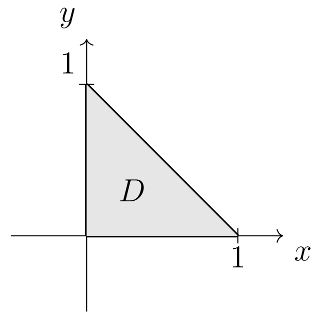
6. Aufgabe **[4 Punkte]**

Sei

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \, x \geq 0, \, y \geq 0, \, x+y \leq 1\right\}.$$

(a) **[1 Punkt]**
Skizzieren Sie die Teilmenge D in der (x,y)-Ebene.
Lösung:

Wir skizzieren die Teilmenge D in der (x,y)-Ebene.



(b) **[0.5 Punkte]** Berechnen Sie den Flächeninhalt von D.
Lösung:

Der Flächeninhalt von D ist gleich

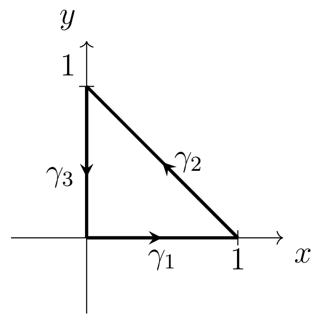
$$\frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}.$$

(c) **[2.5 Punkte]** Sei $\gamma = \partial D$ der Rand des Gebietes D im Gegenuhrzeigersinn orientiert und sei das Vektorfeld $\vec{F} = \begin{pmatrix} y \\ 3x \end{pmatrix}$. Berechnen Sie das Integral

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

auf zwei verschiedene Arten.
Lösung:

Der Rand γ kann wie folgt parametrisiert werden,



wobei

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{für } t \in [0,1], \\
\gamma_2(t) &= \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix}, \qquad \text{für } t \in [0,1], \\
\gamma_3(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1-t \end{pmatrix}, \qquad \text{für } t \in [0,1].
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\gamma_1} y\,dx + 3x\,dy \\
&= \int_0^1 0 \cdot 1 + 3t \cdot 0\,dt \\
&= \Big[0\Big]_0^1 = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{\gamma_2} y\,dx + 3x\,dy \\
&= \int_0^1 t \cdot (-1) + 3(1-t) \cdot 1\,dt \\
&= \int_0^1 -4t + 3\,dt \\
&= \Big[-2t^2 + 3t\Big]_0^1 = 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_{\gamma_3} y\,dx + 3x\,dy \\
&= \int_0^1 (1-t) \cdot 0 + 0 \cdot (-1)\,dt \\
&= \Big[0\Big]_0^1 = 0.
\end{aligned}$$

Das impliziert

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = I_1 + I_2 + I_3 = 1.$$

Ferner ergibt der Satz von Green

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \Big(\partial_x Q(x,y) - \partial_y P(x,y)\Big)\,dx\,dy = \iint_D (3-1)\,dx\,dy = 2\iint_D 1\,dx\,dy,$$

wobei $\iint_D 1\,dx\,dy$ gleich dem Flächeninhalt von D ist. Das impliziert

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$