Prof. P. Cheridito | ETH Zürich | 29. August 2022

D-MATL D-MAVT Neur. Syst. Comp.

Stochastik (401-0603-00L)

Lösungen

1. (9 Punkte)

Carolin und Jan möchten sich zum Tennisspielen verabreden. Dafür möchten sie gerne wissen, ob es am nächsten Tag regnen wird. In ihrer Region liegt die für diese Jahreszeit typische Regenwahrscheinlichkeit bei 10%. Für genauere Vorhersagen benützt jeder der beiden eine andere Wetterapp: Carolin benützt App A und Jan benützt App B. Wir bezeichnen mit

- R das Ereignis, dass es am nächsten Tag regnet, mit
- KR das Ereignis, dass es am nächsten Tag keinen Regen gibt, mit
- AR das Ereignis, dass App A Regen vorhergesagt hat, und mit
- BR das Ereignis, dass App B Regen vorhergesagt hat.

Die Wahrscheinlichkeit, dass App A Regen vorhergesagt hat, obwohl es keinen Regen gibt, liegt bei 20%, d.h. $\mathbb{P}(\mathrm{AR} \mid \mathrm{KR}) = 0.2$.

Analog ist $\mathbb{P}(\mathrm{BR} \mid \mathrm{KR}) = 0.3$.

Ausserdem wissen wir, dass

$$\mathbb{P}(\mathrm{BR} \mid \mathrm{KR} \cap \mathrm{AR}) = 0.7, \text{ und } \mathbb{P}(\mathrm{AR} \cap \mathrm{BR} \mid \mathrm{R}) = 0.8,$$

d.h. bedingt darauf, dass es keinen Regen gibt und dass App A Regen vorhergesagt hat, ist die Wahrscheinlichkeit, dass auch App B fälschlicherweise Regen vorhergesagt hat 70%, und die Wahrscheinlichkeit, dass App A und App B korrekterweise Regen vorhersagen liegt bei 80%.

a) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sowohl App A als auch App B Regen vorhergesagt haben, bedingt darauf, dass es keinen Regen gibt.

b) (1 Punkt) Weissen Sie nach, ob, bedingt auf KR, die Ereignisse AR und BR unabhängig sind oder nicht.

c) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es am nächsten Tag regnet, gegeben, dass sowohl App A als auch App B Regen vorhergesagt haben.

Carolin und Jan entschliessen sich dazu am nächsten Tag Tennis spielen zu gehen, wenn zumindest eine der Apps keinen Regen vorhersagt.

Begründen Sie Ihre Antworten zu den folgenden zwei Fragen.

d) (2 Punkte) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden Tennis spielen gehen?

e) (2 Punkte) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es am nächsten Tag regnet, gegeben dass Carolin und Jan Tennis spielen gehen?

Lösung:

a)

$$\mathbb{P}(\mathrm{AR} \cap \mathrm{BR} \mid \mathrm{KR}) = \mathbb{P}(\mathrm{BR} \mid \mathrm{AR} \cap \mathrm{KR})\mathbb{P}(\mathrm{AR} \mid \mathrm{KR}) = 0.7 \cdot 0.2 = 0.14.$$

b) Nein.

$$\mathbb{P}(\mathrm{BR} \mid \mathrm{KR} \cap \mathrm{AR}) = 0.7 \neq 0.3 = \mathbb{P}(\mathrm{BR} \mid \mathrm{KR}).$$

Alternativ:

$$\mathbb{P}(\mathrm{AR} \cap \mathrm{BR} \mid \mathrm{KR}) = 0.14 \neq 0.3 \cdot 0.2 = \mathbb{P}(\mathrm{BR} \mid \mathrm{KR})\mathbb{P}(\mathrm{AR} \mid \mathrm{KR}).(1P)$$

c)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathrm{R} \mid \mathrm{AR} \cap \mathrm{BR}) &= \frac{\mathbb{P}(\mathrm{AR} \cap \mathrm{BR} \mid \mathrm{R})\mathbb{P}(\mathrm{R})}{\mathbb{P}(\mathrm{AR} \cap \mathrm{BR})} \\ &= \frac{\mathbb{P}(\mathrm{AR} \cap \mathrm{BR} \mid \mathrm{R})\mathbb{P}(\mathrm{R})}{\mathbb{P}(\mathrm{AR} \cap \mathrm{BR} \mid \mathrm{R})\mathbb{P}(\mathrm{R}) + \mathbb{P}(\mathrm{AR} \cap \mathrm{BR} \mid \mathrm{KR})(1 - \mathbb{P}(\mathrm{R}))} \\ &= \frac{0.8 \cdot 0.1}{0.8 \cdot 0.1 + 0.14 \cdot 0.9} \approx 0.3884.\end{aligned}$$

d) Wir nennen G das Ereignis, dass Carolin und Jan Tennis spielen gehen.

$$\mathbb{P}(\mathrm{G}) = 1 - \mathbb{P}(\mathrm{AR} \cap \mathrm{BR}) = 1 - (0.08 + 0.126) = 1 - 0.206 = 0.794$$

e) Es gilt, dass

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathrm{G} \mid \mathrm{R}) &= 1 - \mathbb{P}(\mathrm{AR} \cap \mathrm{BR} \mid \mathrm{R}) \\ &= 1 - 0.8 = 0.2.\end{aligned}$$

Somit erhält man

$$\mathbb{P}(\mathrm{R} \mid \mathrm{G}) = \frac{\mathbb{P}(\mathrm{G} \mid \mathrm{R})\mathbb{P}(\mathrm{R})}{\mathbb{P}(\mathrm{G})} = \frac{0.2 \cdot 0.1}{0.794} \approx 0.0252.$$

2. (11 Punkte) Beurteilen Sie die folgenden 11 Aussagen auf ihre Richtigkeit. **Kreuzen Sie Ihre Antworten auf dem zusätzlich angehängten Antwortblatt an**. Nur das Antwortblatt wird ausgewertet. Pro korrekter Antwort gibt es einen Punkt. Es gibt **keinen** Punkteabzug für falsche Antworten.

a) (1 Punkt) Gegeben sind die Ereignisse A und B. Wenn $\mathbb{P}(A) > 0$ und $A \subseteq B$, dann gilt, dass $\mathbb{P}(B|A) = 1$.

b) (1 Punkt) Gegeben ist eine stetige, reellwertige Zufallsvariable X mit Verteilungsfunktion F auf $\mathbb{R}$. Für ein beliebiges $c \in \mathbb{R}$ gilt dann, dass $\mathbb{P}(X = c) = 0$.

c) (1 Punkt) Für alle $X \sim \mathrm{Bin(m, p)}$ und $Y \sim \mathrm{Bin(n, p)}$ gilt, dass $X + Y \sim \mathrm{Bin(m + n, p)}$.

d) (1 Punkt) Für eine stetige, auf (0, 1) uniform verteilte Zufallsvariable U, sprich $U \sim \mathrm{Uni}(0, 1)$, gilt, dass $\mathbb{V}(U) = \frac{1}{3}$.

e) (1 Punkt) Gegeben ist die Zufallsvariable X. Die Grösse $\mathbb{E}[(X - c)^2]$ ist minimal, wenn $c = \mathbb{E}[X]$.

f) (1 Punkt) $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ genau dann, wenn $X = \mu + \sigma Z$, wobei $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

g) (1 Punkt) Gegeben sind die Zufallsvariablen X und Y. Wenn gilt, dass

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y],$$

dann sind X und Y unabhängig.

h) (1 Punkt) Gegeben ist eine Zufallsvariable X mit $\mathbb{E}[|X|] < \infty$. Es gilt, dass

$$\mathbb{E}[|X|] \leq |\mathbb{E}[X]|.$$

i) (1 Punkt) Für zwei reellwertige Zufallsvariablen X und Y gilt, dass

$$\mathbb{V}(X + Y) + \mathbb{V}(X - Y) = 2(\mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)).$$

j) (1 Punkt) Für zwei reellwertige Zufallsvariablen X und Y mit $\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(Y)$ gilt, dass $X + Y$ und $X - Y$ korreliert sind.

k) (1 Punkt) Gegeben ist die stetige Zufallsvariable X. Der Median der zugehörigen Verteilung ist jener Wert x, für den gilt, dass $\mathbb{P}(X < x) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(X > x)$.

Lösung:

a) (1 Punkt) Wahr.

b) (1 Punkt) Wahr.

c) (1 Punkt) Nicht wahr. Die Aussage stimmt, wenn man zusätzlich annimmt, dass X und Y unabhängig sind.

d) (1 Punkt) Nicht wahr. $\mathbb{V}(U) = \frac{1}{12}$.

e) (1 Punkt) Wahr.

f) (1 Punkt) Wahr.

g) (1 Punkt) Nicht wahr. Wenn X und Y unabhängig sind, dann gilt, dass $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$. Umgekehrt impliziert $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ nicht, dass X und Y unabhängig sind.

h) (1 Punkt) Nicht wahr.
Ein Gegenbeispiel:

$$X = \begin{cases} -1 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1/2, \\ 1 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1/2. \end{cases}$$

Dann gilt, dass $1 = \mathbb{E}[|X|] > |\mathbb{E}[X]| = 0$.

i) Wahr.

$$\begin{aligned} &\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\operatorname{Cov}(X,Y), \\ &\mathbb{V}(X-Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(-Y) + 2\operatorname{Cov}(X,-Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) - 2\operatorname{Cov}(X,Y). \end{aligned}$$

j) (1 Punkt) Nicht wahr. Es gilt $\operatorname{Cov}(X+Y, X-Y) = \operatorname{Cov}(X,X) - \operatorname{Cov}(X,Y) + \operatorname{Cov}(Y,X) - \operatorname{Cov}(Y,Y) = \mathbb{V}(X) - \mathbb{V}(Y) = 0$. Daher sind $X+Y$ und $X-Y$ nicht korreliert.

k) (1 Punkt) Wahr.

3. (9 Punkte) Alle θ Minuten schliesst die Bahnschranke an der S-Bahnstation Zürich Binz. Jeden Morgen muss Sophie die Gleise an dieser Bahnschranke überqueren. Wenn sie dort ankommt, ist die Bahnschranke oft geschlossen. Die Dauer X, die Sophie dann warten muss, bis sich die Bahnschranke wieder öffnet, ist stetig uniform-verteilt auf dem Intervall $[0, \theta]$, d.h.

$$X \sim \text{Uni}(0, \theta).$$

Sie sammelt so eine Stichprobe von n Wartedauern $X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} \text{Uni}(0, \theta)$.

a) (1 Punkt) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von $\max_{i=1,\ldots,n} X_i$.

Wir möchten nun den unbekannten Parameter $\theta > 0$ schätzen.

b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass der Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\theta}_{MLE}$ für θ gegeben ist als

$$\hat{\theta}_{MLE} = \max_{i=1,\ldots,n} X_i.$$

c) (2 Punkte) Ist der MLE $\hat{\theta}_{MLE}$ erwartungstreu? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass der Momentenschätzer $\hat{\theta}_{MoM}$ für θ gegeben ist als

$$\hat{\theta}_{MoM} = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Bewerten Sie folgende Aussagen auf ihre Richtigkeit und begründen Sie Ihre Antworten!

e) (2 Punkte) Die Varianz des Momentenschätzers halbiert sich, wenn Sophie eine doppelt so grosse Stichprobe nimmt.

f) (2 Punkte) Der realisierte Wert des Momentenschätzers $\hat{\theta}_{MoM}$ is immer grösser als der realisierte Wert des Maximum-Likelihood-Schätzers $\hat{\theta}_{MLE}$, unabhängig von den Realisierungen $x_1, \ldots, x_n$.

Lösung:

a)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\max_{i=1,\ldots,n} X_i \leq x\right) &= \mathbb{P}(X_i \leq x, \forall i = 1 \ldots, n) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x)^n \\
&= \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \left(\frac{x}{\theta}\right)^n, & 0 \leq x < \theta, \\ 1, & \theta \leq x. \end{cases}
\end{aligned}$$

b) Die Likelihoodfunktion

$$L(\theta | x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta}, & x_i \leq \theta \, \forall i \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\theta^n}, & x_i \leq \theta \, \forall i \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

ist fallend in θ, d.h. wir möchten θ so klein wie möglich wählen, ohne, dass einer der Faktoren null wird. Daher ist $\hat{\theta}_{MLE} = \max_{i=1,\ldots,n} X_i$.

c) Nein.

$$\mathbb{E}[\hat{\theta}_{MLE}] = \int_0^\theta yn\frac{y^{n-1}}{\theta^n}\,dy = \frac{1}{\theta^n}n\frac{y^{n+1}}{n+1}\bigg|_0^\theta = \frac{n}{n+1}\theta$$

d)

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\theta x\frac{1}{\theta}\,dx = \frac{1}{\theta}\frac{\theta^2}{2} = \frac{\theta}{2}$$

$$\implies \hat{\theta}_{MoM} = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^n X_i.$$

e) Wahr.

$$\mathrm{Var}(\hat{\theta}_{MoM}) = \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(X_i) = \frac{4}{n^2}n\mathrm{Var}(X) = \frac{4}{n}\mathrm{Var}(X).$$

Wenn wir nun n doppelt so gross wählen, dann bekommen wir im rechten Ausdruck $= \frac{4}{2n}\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{2}\mathrm{Var}(\hat{\theta}_{MoM})$.

f) Falsch. Es kommt auf die Werte der Realisierungen $x_1, \dots, x_n$ an, ob $\hat{\theta}_{MoM} > \hat{\theta}_{MLE}$, d.h. ob der Mittelwert der Beobachtungen grösser ist als die Hälfte des Wertes der maximalen Beobachtung, oder umgekehrt.

4. (11 Punkte)

a) Eine Gruppe von Wissenschaftlern möchte das mittlere Alter einer Tierpopulation bestimmen. Für eine Stichprobe bestehend aus 30 Tieren wird das mittlere Alter von 23 Jahren festgestellt. Die Wissenschaftler vermuten, dass der tatsächliche Mittelwert grösser oder kleiner 25 ist. Sie nehmen an, dass die Population approximativ normalverteilt ist, mit bekannter Varianz $\sigma^2 = 18$, und möchten statistisch belegen, ob sich der tatsächliche Mittelwert von 25 unterscheidet.

- **i) (1 Punkt)** Nennen Sie die Modellannahmen.
- **ii) (1 Punkt)** Formulieren Sie geeignete Null- und Alternativhypothesen um die Vermutung der Wissenschaftler statistisch zu testen.
- **iii) (3 Punkte)** Führen Sie einen geeigneten statistischen Test zum Niveau $\alpha = 0.05$ durch: nennen Sie die Teststatistik, bestimmen Sie den realisierten Wert der Teststatistik, berechnen Sie den Verwerfungsbereich und nennen Sie den Testentscheid.

b) In einer Flugzeugbaufirma werden zwei Gruppen von Arbeitern damit beauftragt, die Effektivität einer neuen Technologie zu testen. Gruppe A, bestehend aus 50 Arbeitern, wendet die alte Technologie an, während Gruppe B, bestehend aus 72 Arbeitern, die neue Technologie anwendet.

Um einen speziellen Bauteil herzustellen braucht ein Arbeiter der Gruppe A im Durchschnitt 80 Stunden, mit einer empirischen Standardabweichung von 10 Stunden. Die Mittlere Zeit, die ein Arbeiter der Gruppe B zur Herstellung desselben Bauteils benötigt, liegt bei 75 Stunden, mit einer empirischen Standardabweichung von 8 Stunden.

Wir nehmen an, dass die Zeit, die ein Arbeiter zur Herstellung des Bauteils benötigt, in beiden Gruppen normalverteilt ist mit der selben Varianz σ^2.

- **i) (1 Punkt)** Nennen Sie die Modellannahmen.
- **ii) (1 Punkt)** Formulieren Sie geeignete Null- und Alternativhypothesen um zu testen, ob die Herstellung des Bauteils durch die neue Technologie effizienter wird.
- **iii) (3 Punkte)** Führen Sie einen geeigneten statistischen Test zum Niveau $\alpha = 0.05$ durch: nennen Sie die Teststatistik, bestimmen Sie den realisierten Wert der Teststatistik, berechnen Sie den Verwerfungsbereich und nennen Sie den Testentscheid.
- **iv) (1 Punkt)** Handelt es sich um einen gepaarten oder ungepaarten Vergleich? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

a) **i) (1 Punkt)** Das Alter der Tiere in der Population ist approximativ normalverteilt mit Mittelwert μ und Varianz σ^2, sprich

$$X_1, \ldots, X_n \text{ sind i.i.d. } \mathcal{N}(\mu, \sigma^2).$$

Der Parameter μ ist unbekannt, aber $\sigma^2 = 18$ wird als bekannt angenommen.

ii) (1 Punkt) $H_0 : \mu = 25$, $H_A : \mu \neq 25$.

iii) (3 Punkte) $n = 30$, $\bar{X}_n = 23$, $\sigma^2 = 18$, $\alpha = 0.05$.
Das $(1-\alpha/2)$-Quantil der Standardnormalverteilung ist laut Tabelle $q_{1-\alpha/2} = q_{0.975} = 1.96$.
Wir verwerfen H_0, falls $Z \geq q_{1-\alpha/2}$ oder $Z \leq -q_{1-\alpha/2}$. Somit ergibt sich der Verwerfungsbereich $K = (-\infty, -1.96] \cup [1.96, \infty)$.
Die realisierte Teststatistik lautet

$$Z = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} = \frac{23 - 25}{\sqrt{18/30}} = -2.58.$$

Da $Z = -2.58 \in K$, verwerfen wir die Nullhypothese, und schliessen, dass das mittlere Alter der Population von 25 unterschiedlich ist.

b) **i)** **(1 Punkt)** : $n = 50$, X_i beschreibt die Arbeitszeit (in Stunden), die der i-te Arbeiter der Gruppe A zur Herstellung des Bauteils benötigt, für $i = 1, \ldots, n$; $m = 72$, Y_j beschreibt die Arbeitszeit (in Stunden), die der j-te Arbeiter der Gruppe B zur Herstellung des Bauteils benötigt, für $j = 1, \ldots, m$. Wir nehmen an, dass

$$X_1, \ldots, X_n \text{ i.i.d. } \mathcal{N}(\mu_X, \sigma^2), Y_1, \ldots, Y_m \text{ i.i.d. } \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma^2)$$

und, dass $(X_1, \ldots, X_n), (Y_1, \ldots, Y_m)$ unabhängig sind.

ii) **(1 Punkt)**

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y,$$

d.h. die Implementierung der neuen Technologie erhöht die Effizienz nicht.

$$H_A : \mu_X > \mu_Y,$$

d.h. die Implementierung der neuen Technologie erhöht die Effizienz.

iii) **(3 Punkte)** $n = 50$, $m = 72$, $S_X^2 = 100$, $S_Y^2 = 64$, $\bar{X}_n = 80$ ist die durchschnittliche Zeit, die ein Arbeiter der Gruppe A zur Herstellung des Bauteils benötigt; $\bar{Y}_m = 75$ ist die durchschnittliche Zeit, die ein Arbeiter der Gruppe B zur Herstellung des Bauteils benötigt. Es ergibt sich die Anzahl von $n + m - 2 = 120$ Freiheitsgraden. Wir berechnen den realisierten Wert der Teststatistik

$$t = \frac{\bar{X}_n - \bar{Y}_m}{S_{\text{pool}} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}},$$

wobei $S_{\text{pool}}^2 = \frac{1}{n+m-2}\Big((n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2\Big)$ ein gewichtetes Mittel der geschätzten Varianzen der beiden Gruppen ist und erhalten $t = 3.06$. Der Verwerfungsbereich ist wegen $t_{n_1+n_2-2,1-\alpha} = t_{120,0.95} = 1.658$ gegeben als $K = [1.658, \infty)$.
Da $t = 3.06 \in K$, verwerfen wir die Nullhypothese H_0.
Wir schliessen, dass die neue Technologie die Effizienz der Herstellung erhöht.

iv) **(1 Punkt)** Es handelt sich um einen ungepaarten Vergleich (ungepaarter Zwei-Stichproben t-Test). Wir vergleichen den Mittelwert zweier unabhängiger, unterschiedlich grosser Gruppen von Arbeitern.