Prof. P. Cheridito | ETH Zürich | 24. Januar 2022

D-MATL D-MAVT Neur. Syst. Comp.

Stochastik (401-0603-00L)

Prüfung

1. **(9 Punkte)** Die Freunde Alice, Bob, Charlie und Doris treffen sich zum Wichteln. Dafür bereitet Doris vier Kärtchen mit ihren Namen darauf vor und gibt sie zusammengefaltet in eine Schüssel. Reihum ziehen daraufhin alle ein Kärtchen aus der Schüssel ohne es zurückzulegen. Die Ziehung gelingt, wenn niemand das Kärtchen mit dem eigenen Namen zieht. Wir bezeichnen mit A_i das Ereignis, dass sich die i-te Person nicht selbst zieht. Aus Symmetriegründen hat man $\mathbb{P}(A_i) = \frac{3}{4}$ für $i = 1, \ldots, 4$.

a) **(1 Punkt)** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich die ersten beiden Personen nicht selbst ziehen.

b) **(2 Punkte)** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich die zweite Person selbst zieht, gegeben, dass sich die erste Person nicht selbst gezogen hat.

c) **(2 Punkte)** Sind A_1 und A_2 unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Es gibt 9 Fälle, in denen niemand aus der Gruppe das Kärtchen mit dem eigenen Namen zieht.

d) **(2 Punkte)** Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens jemand aus der Gruppe das Kärtchen mit dem eigenen Namen zieht (d.h., dass die Ziehung nicht gelingt)? Begründen Sie Ihre Antwort.

Die vier Freunde wiederholen die Ziehungen so lange, bis eine gelingt. Sei X die Anzahl der Versuche, bis sich niemand selbst gezogen hat.

e) **(1 Punkt)** Wie hoch ist die erwartete Anzahl Versuche, die benötigt werden, bis eine Ziehung gelingt, d.h., bis sich niemand selbst gezogen hat?

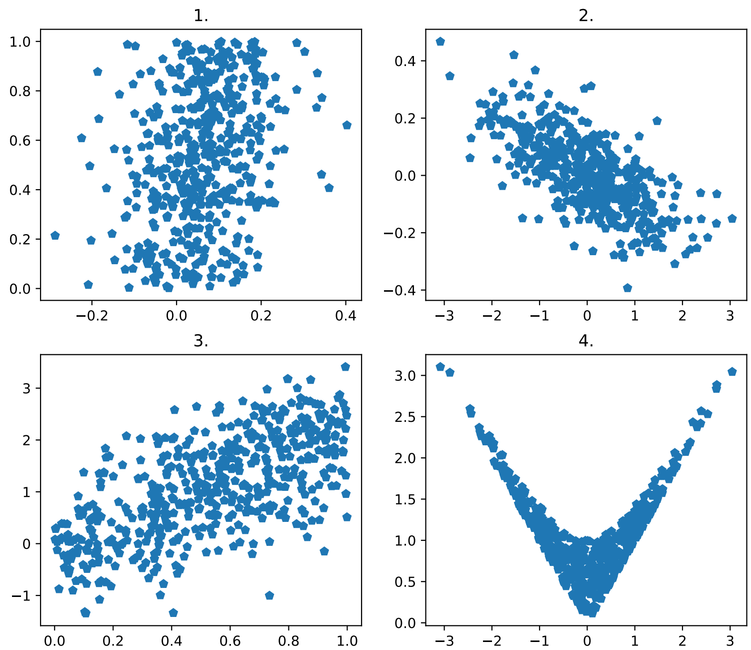
f) **(1 Punkt)** Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter 10 Versuchen genau zwei gültige Ziehungen (d.h., zwei Ziehungen in denen sich niemand selbst zieht) dabei sind?

2. (11 Punkte) Beurteilen Sie die folgenden 11 Aussagen auf ihre Richtigkeit. **Kreuzen Sie Ihre Antworten auf dem zusätzlich angehängten Antwortblatt an**. Nur das Antwortblatt wird ausgewertet. Pro korrekter Antwort gibt es einen Punkt. Es gibt **keinen** Punkteabzug für falsche Antworten.

Ordnen Sie die vier Scatterplots den empirischen Korrelationen

$$i = -0.69, \quad ii = 0.29, \quad iii = -0.07, \quad iv = 0.66$$

zu und bewerten Sie die folgenden Aussagen. (Bem.: Die Zuordnung der Scatterplots gibt keine zusätzlichen Punkte.)



a) (1 Punkt) Es gilt $2.i$ und $1.ii$.

b) (1 Punkt) Es gilt $3.iv$ und $4.iii$.

c) (1 Punkt) Die Ereignisse A_i, $i = 1, \dots, 5$ sind unabhängig genau dann, wenn

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$$

für alle $1 \leq i < j \leq 5$.

d) (1 Punkt) Zwei unkorrelierte Zufallsvariablen sind immer auch unabhängig.

e) (1 Punkt) Für zwei unabhängige Zufallsvariablen X, Y und zwei positive Konstanten $a, b > 0$ gilt

$$\mathrm{Cov}(aX + bY) = a\mathrm{Var}(X) + b\mathrm{Var}(Y).$$

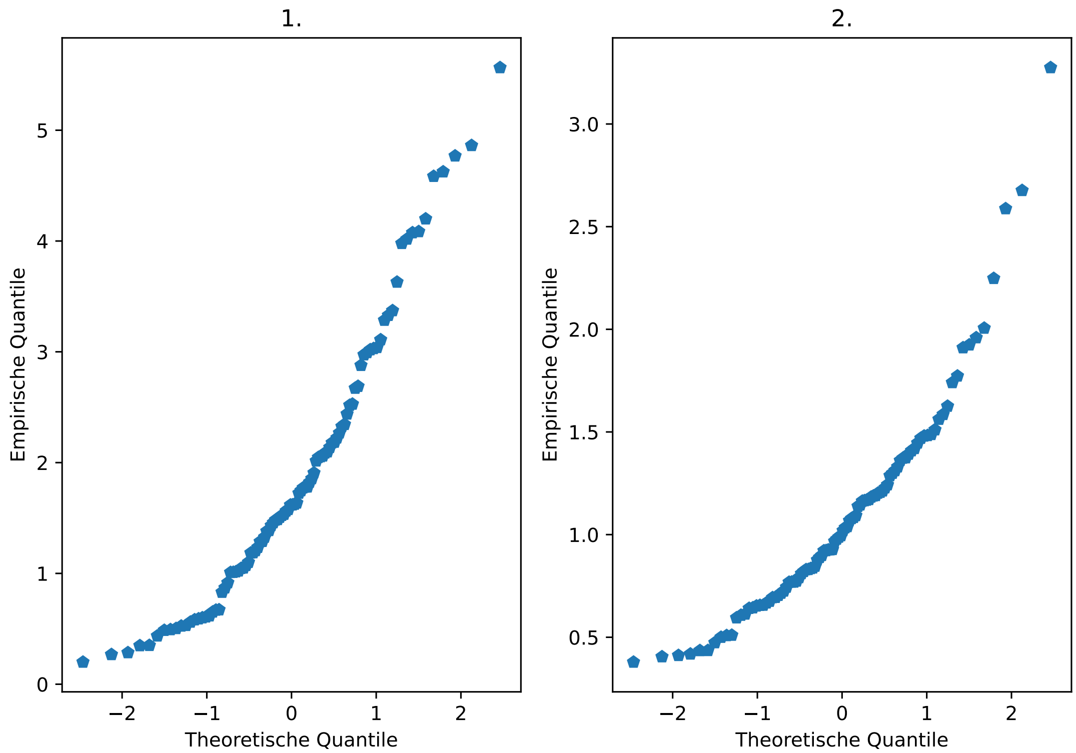
f) (1 Punkt) Für eine normalverteilte Zufallsvariable X und eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{P}(X \leq c) = \mathbb{P}(X < c).$$

g) **(1 Punkt)** Für eine standardnormalverteilte Zufallsvariable X gilt, dass $\sigma X - \mu$ normalverteilt ist mit Mittelwert μ und Standardabweichung σ.

h) **(1 Punkt)** Wenn F eine stetige Verteilungsfunktion und $U \sim \text{Unif}([0,1])$ eine uniformverteilte Zufallsvariable sind, dann gilt, dass $F(U)$ eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F ist.

Gegeben sind die folgenden Normal-QQ-Plots.



i) **(1 Punkt)** Der Median der 2. empirischen Verteilung ist grösser als jener der 1. empirischen Verteilung.

j) **(1 Punkt)** Für die empirische Verteilung aus dem 1. Plot gilt, dass es wahrscheinlicher ist Werte grösser als 2 zu beobachten als für die Standardnormalverteilung.

k) **(1 Punkt)** Das empirische 10%-Quantil der Verteilung im 2. Plot ist grösser als jenes der Standardnormalverteilung.

3. (9 Punkte) Laut neuem Fahrplan soll in der Stosszeit alle 10 Minuten ein zusätzlicher Bus fahren. Allerdings ist nicht klar ersichtlich, wann die Stosszeit beginnt.

Die Zeit X, die Vergeht bis ein zusätzlicher Bus kommt, ist gemäss der Dichte

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x-\mu)}, & x > \mu \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

verteilt, mit unbekanntem Parameter $\mu > 0$. Basierend auf einer Stichprobe von unabhängigen Wartedauern $X_1, \ldots, X_n$ möchten wir den Parameter μ schätzen.

a) (1 Punkt) Berechnen Sie die erwartete Wartedauer, bis ein zusätzlicher Bus kommt.

b) (1 Punkt) Wie lautet der Momentenschätzer $\hat{\mu}_{MoM}$ von μ?

c) (1 Punkt) Ist der Momentenschätzer $\hat{\mu}_{MoM}$ erwartungstreu? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) (2 Punkte) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\mu}_{MLE}$ für μ.

e) (2 Punkt) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von X.

f) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von $\hat{\mu}_{MLE}$.

4. (11 Punkte) Wir haben zwei Münzen vor uns liegen und wissen, dass nur eine davon fair ist. Bezeichnen wir mit p die Wahrscheinlichkeit dass ein Münzwurf in *Kopf* resultiert. Wir wissen also, dass für eine der Münzen $p = 0.5$. Bei der anderen Münze wissen wir, dass die Wahrscheinlichkeit *Kopf* zu werfen höher ist.

Wir dürfen nun eine der Münzen nehmen und diese 10 Mal werfen. Wir vermuten, dass es die gezinkte Münze ist. Wie können wir unsere Vermutung statistisch belegen?

Wir entschliessen uns dazu einen Binomialtest durchzuführen um unsere Vermutung zu belegen.

a) (1 Punkt) Formulieren Sie geeignete Hypothesen.

b) (2 Punkte) Unser Test soll die Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art von 5% nicht überschreiten. Bestimmen Sie den maximalen Verwerfungsbereich.

c) (1 Punkt) Bei unseren 10 Münzwürfen bekommen wir 8 Mal *Kopf*. Führt das dazu, dass wir die Nullhypothese verwerfen? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) (1 Punkt) Wie gross ist die Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art für einen einseitigen Binomialtest, der die Nullhypothese nach Beobachten von mindestens 8 Mal *Kopf* bei 10 Münzwürfen verwirft?

e) (1 Punkt) Angenommen, wir haben tatsächlich die gezinkte Münze genommen, und $p = 0.7$. Wie hoch ist bei dem Test aus Punkt **b)** die Wahrscheinlichkeit, dass wir die Nullhypothese nicht verwerfen, obwohl $p = 0.7$?

Bewerten Sie folgende Aussagen und begründen Sie Ihre Antwort.

f) (1 Punkt) Wenn wir das Niveau des Tests erhöhen, wird die Fehlerwahrscheinlichkeit 2. Art geringer.

g) (1 Punkt) Wir bezeichnen mit X die Anzahl der Würfe, die in *Kopf* resultieren. Für 10 Münzwürfe ist X approximativ normalverteilt mit Mittelwert p und Varianz $\frac{p(1-p)}{10}$.

Wir führen zum Vergleich auch noch einen einseitigen Z-Test durch.

h) (1 Punkt) Ein solcher Test zum Niveau 0.05 verwirft die Nullhypothese bei 8 Mal *Kopf* unter 10 Münzwürfen.

i) (2 Punkte) Wie viele Münzwürfe dürfen wir höchstens machen, damit die Nullhypothese auf dem 5% Niveau verworfen wird, wenn 7 Mal *Kopf* beobachtet wird?

Stochastik - Tabellen

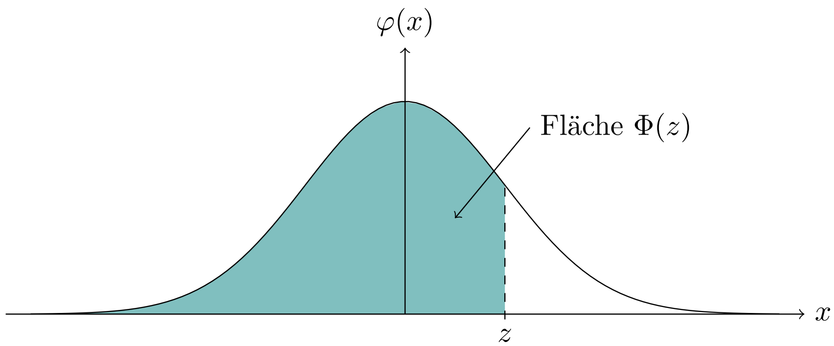
Kritische Grenzen beim Wilcoxon-Test für das 5%-Niveau:

	zweiseitig		einseitig	
n	l	u	l	u
6	0	21	2	19
7	2	26	3	25
8	3	33	5	31
9	5	40	8	37
10	8	47	10	45
11	10	56	13	53
12	13	65	17	61
13	17	74	21	70
14	21	84	25	80
15	25	95	30	90
16	29	107	35	101
17	34	119	41	112
18	40	131	47	124
19	46	144	53	137
20	52	158	60	150
21	58	173	67	164
22	65	188	75	178
23	73	203	83	193
24	81	219	91	209
25	89	236	100	225
26	98	253	110	241
27	107	271	119	259
28	116	290	130	276
29	126	309	140	295
30	137	328	151	314

Für den zweiseitigen Test ist der Verwerfungsbereich gegeben durch $K = \{W \leq l\} \cup \{W \geq u\}$.
Bei einem einseitigen Test verwendet man die entsprechenden Werte in der Spalte "einseitig".

Tabelle der Standardnormalverteilung:

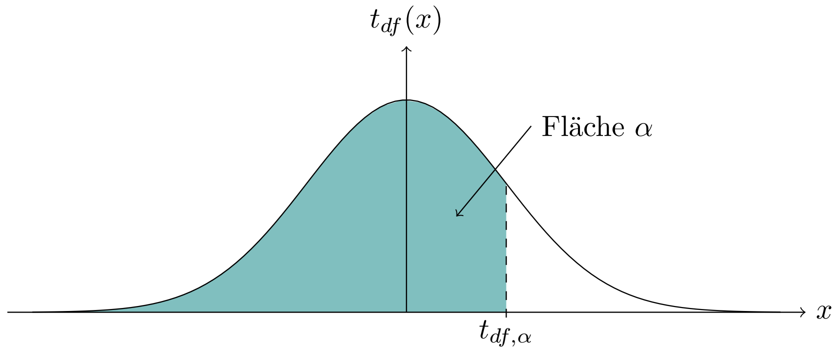
$$\Phi(z) = \mathbb{P}\left(Z \leq z\right), \; Z \sim \mathcal{N}\left(0,1\right)$$



Lesebeispiel Tabelle: $\mathbb{P}\left(Z \leq 1.96\right) = 0.975$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

Quantile der t-Verteilung: (df bezeichnet den Freiheitsgrad)



Lesebeispiel Tabelle: $t_{9,\,0.975} = 2.262$

$df \setminus \alpha$	0.60	0.70	0.80	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
1	0.325	0.727	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	0.289	0.617	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.277	0.584	0.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.271	0.569	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.267	0.559	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.265	0.553	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.263	0.549	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.262	0.546	0.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	0.261	0.543	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.260	0.542	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.260	0.540	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.259	0.539	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	0.259	0.538	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.258	0.537	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	0.258	0.536	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	0.258	0.535	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.257	0.534	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.257	0.534	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	0.257	0.533	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.257	0.533	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	0.257	0.532	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	0.256	0.532	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	0.256	0.532	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	0.256	0.531	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	0.256	0.531	0.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	0.256	0.531	0.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	0.256	0.531	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	0.256	0.530	0.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	0.256	0.530	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	0.256	0.530	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	0.255	0.529	0.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	0.254	0.527	0.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
90	0.254	0.526	0.846	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632
120	0.254	0.526	0.845	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
∞	0.253	0.524	0.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576