Dr. C. Czichowsky ETH Zürich Winter 2020

Stochastik - Lösungen

1. **a)** ii)

b) iii)

c) ii)

d) i)

e) iii)

f) iii)

g) i)

h) h1) iii)
h2) i)

i) ii)

2. **a)** Seien A, F, P die Ereignisse, dass sein Gegner ein Anfänger, Fortgeschrittener bzw. Profi ist. Sei G das Ereignis, dass Max gewinnt. Dann gilt nach dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} P(G) &= P(G|A)P(A) + P(G|F)P(F) + P(G|P)P(P) \\ &= 0.89 \cdot 0.37 + 0.72 \cdot 0.52 + 0.50 \cdot 0.11 = 0.7587. \end{aligned}$$

b) Nach dem Satz von Bayes gilt

$$P(P|G) = \frac{P(G|P)P(P)}{P(G)} = \frac{0.5 \cdot 0.11}{0.7587} = 0.0725.$$

c) Wir treffen die Annahme, dass die Spiele unabhängig voneinander sind. Die Wahrscheinlichkeit, dass Max in n Spielen gegen Anfänger immer gewinnt, ist $P(G|A)^n$. Die Wahrscheinlichkeit, dass er mindestens einmal verliert, ist genau die Gegenwahrscheinlichkeit, also $1 - P(G|A)^n$. Wir suchen also n so dass gilt $1 - P(G|A)^n \geq 0.999$. Umformen liefert das Ergebnis $n \geq \frac{\log(0.001)}{\log(P(G|A))} \approx 59.28$. Also sind es mindestens 60 Spiele .

d) Y_i, $1 \leq i \leq n_F$ sind i.i.d. mit $\mathbb{E}[Y_1] = \mu_F$, $\mathrm{Var}(Y_1) = \sigma_F^2$ und Z_i, $1 \leq i \leq n_F$ sind i.i.d. mit $\mathbb{E}[Z_1] = \mu_P$, $\mathrm{Var}(Z_1) = \sigma_P^2$. Sei weiter $S_Y := \sum_{i=1}^{n_F} Y_i$ und $S_Z := \sum_{i=1}^{n_P} Z_i$. Nach dem ZGWS gilt approximativ

$$S_Y \approx N(n_F\mu_F, n_F\sigma_F^2), \quad S_Z \approx N(n_P\mu_P, n_P\sigma_P^2).$$

Da alle Spiele unabhängig sind, sind insbesondere S_Y, S_Z unabhängig und somit können wir die Formel für die Verteilung der Summe unabhängiger normalverteilter Zufallsvariablen benutzen und bekommen

$$S := S_Y + S_Z \approx N(n_F\mu_F + n_P\mu_P, n_F\sigma_F^2 + n_P\sigma_P^2).$$

e) Sei $W := \frac{S-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$. Es gilt

$$\begin{aligned} P(S \geq 700) = P\left(W \geq \frac{700-\mu}{\sigma}\right) &= P(W \geq -1.0692) \\ &\approx 1 - \Phi(-1.07) = \Phi(1.07) = 0.8577. \end{aligned}$$

Den Wert von $\Phi(1.07)$ haben wir dabei aus der Tabelle der Normalverteilung abgelesen.

f) Sei μ der wahre aber unbekannte Erwartungswert der Verzögerung mit dem neuen Controller. $\bar{X}_{100} := \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i$ ist normalverteilt, $\bar{X}_{100} \sim N(\mu, \sigma^2/100)$, wobei X_i die gemessenen Verzögerungen in den einzelnen Messungen sind. Also ist $V := \frac{\bar{X}_{100}-\mu}{\sigma/\sqrt{100}} \sim N(0,1)$.
Das zweiseitige Vertrauensintervall für V ist also gegeben durch $[-z_{1-\alpha/2}, z_{1-\alpha/2}]$, wobei $z_{1-\alpha/2}$ so gewählt ist, dass $\Phi(z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$ gilt. Ablesen aus der Tabelle liefert für $\alpha = 0.05$ den Wert $z_{1-\alpha/2} = 1.96$.
Daraus folgt, dass das Vertrauensintervall für μ gegeben ist durch $[\bar{X}_{100} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{100}}, \bar{X}_{100} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{100}}]$. Einsetzten der Werte liefert das Vertrauensintervall $[0.558, 0.582]$.
Da die Verzögerung mit dem alten Controller (0.55s) nicht im Vertrauensintervall für μ liegt, folgt, dass es einen statistisch signifikanten Unterschied gibt (H_0 wird verworfen, der neue Controller ist signifikant schlechter als der alte) .
Da allerdings das gesamte Vertrauensintervall von μ innerhalb des irrelevanten Bereichs liegt (0.55 ± 0.05s) ist die Abweichung fachlich irrelevant .

3. **a)** Es handelt sich um eine uniforme Verteilung auf der Kreisscheibe mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius r .

b) Sei K die Kreisscheibe mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius r. Da die Fläche von K durch $r^2\pi$ gegeben ist, gilt,

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dx\,dy = \int_K \tfrac{1}{r^2\pi} dx\,dy = 1.$$

Offensichtlich gilt auch $f(x,y) \geq 0$, daher handelt es sich um eine Dichtefunktion. .

c) Die Randdichte von X ist gegeben durch

$$f_X(x|r) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y|r)dy = \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \tfrac{1}{r^2\pi} 1_{\{x^2\leq r^2\}} dy$$

$$= \tfrac{1}{r^2\pi} \left[y\right]_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} 1_{\{x^2\leq r^2\}} = \tfrac{2}{r^2\pi}\sqrt{r^2-x^2}\, 1_{\{x^2\leq r^2\}}.$$

d) Aufgrund von Symmetrie gilt, dass die Randdichte von Y gegeben ist durch $f_Y(y|r) = \tfrac{2}{r^2\pi}\sqrt{r^2-y^2}\, 1_{\{y^2\leq r^2\}}$.
Offensichtlich gilt aber $f(x,y|r) \neq f_X(x|r)\, f_Y(y|r)$, daher sind X und Y nicht unabhängig (also abhängig) .

Alternative Lösung für die (Un)abhängigkeit:
X und Y sind nicht unabhängig. Zum Beispiel ist $P(Y > 0.9r) > 0$, jedoch gilt $P(Y > 0.9r \mid X > 0.9r) = 0$, da $0.9^2r^2 + 0.9^2r^2 = 1.62r^2 > r^2$. Insbesondere gilt also nicht für alle $A, B \subset \mathbb{R}$ dass $P(Y \in A|X \in B) = P(Y \in A)$. .

e) Wir berechnen zuerst das zweite Moment von Z. Mit dem gegebenen Tipp gilt

$$\mathbb{E}[Z^2] = \int_{\mathbb{R}} z^2 f_Z(z|r)dz = \int_{\mathbb{R}} z^2\, \tfrac{2}{r^2}\, z 1_{\{0\leq z\leq r\}} dz$$

$$= \tfrac{2}{r^2}\int_0^r z^3 dz = \tfrac{2}{r^2}\left[\tfrac{z^4}{4}\right]_0^r = \frac{r^2}{2}.$$

Der Momentenschätzer (als ZV) für r basierend auf dem zweiten Moment von Z ist somit

$$\hat{r} := \sqrt{2\hat{\mathbb{E}}[Z^2]} = \sqrt{2\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i^2},$$

wobei Z_i i.i.d. Zufallsvariablen mit gleicher Verteilung wie Z sind .
Durch Einsetzen der gegebenen Zahlen erhalten wir $\hat{r} = 2.45$.

f) Die Likelihood-Funktion für r ist gegeben durch

$$L(r) = f(x_1,y_1|r)\cdots f(x_n,y_n|r) = \left(\tfrac{1}{r^2\pi}\right)^n \mathbb{1}_{\{x_1^2+y_1^2\leq r^2\}}\cdots \mathbb{1}_{\{x_n^2+y_n^2\leq r^2\}}.$$

g) Offensichtlich wird $L(r)$ umso grösser, desto kleiner r ist, solange für alle $1 \leq i \leq n$ gilt $x_i^2 + y_i^2 \leq r^2$. Damit folgt, dass der Maximum-Likelihood-Schätzer gegeben ist als $\hat{r}^{\text{MLE}} = \max\{Z_1, \ldots, Z_n\}$, für Z_i i.i.d. Zufallsvariablen mit gleicher Verteilung wie Z .
Einsetzen der Daten ergibt $\hat{r}^{\text{MLE}} = 3.22$.

h) Das Ergebnis des Momentenschätzers ist (hier) nicht sinnvoll, da z.B. der zweite Schuss (x_2, y_2) nicht innerhalb des Kreises mit Radius $\hat{r}$ liegt. Der Zufallsvektor (X, Y) könnte den Wert (x_2, y_2) also niemals annehmen, wenn $r = \hat{r}$ gewählt wird .
(Zusatzinformation: Auf der anderen Seite wird $\hat{r}^{\mathrm{MLE}}$ gerade so gewählt, dass (X, Y) alle Werte annehmen kann, die wir beobachtet haben. Daher ist der Maximum-Likelihood-Schätzer die sinnvollere Wahl.)

4. **a)** i) Für den Wilcoxon-Test benötigen wir die Annahme, dass die Daten einer symmetrischen Verteilung folgen. Da wir aber keine Annahmen treffen wollen, ist der Vorzeichentest besser geeignet .

ii) Sei μ der wahre Median von X. Dann ist die Nullhypothese $H_0 : \mu \geq \mu_0 := 0.5$ und die Alternativhypothese $H_A : \mu < \mu_0$. Wir führen also einen einseitigen Test durch. Die Nullhypothese kann vereinfacht werden zu $H_0 : \mu = \mu_0$.
Die Teststatistik des Vorzeichentests ist definiert als $V := \#\{1 \leq i \leq n | X_i - \mu_0 > 0\}$, wobei X_i, $1 \leq i \leq n$ i.i.d. Zufallsvariablen mit gleicher Verteilung wie X sind. Unter der Nullhypothese gilt $V \sim \text{Bin}(n, 0.5)$, wobei wir $n = 7$ haben .

iii) Der p-Wert gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass ein Ereignis eintritt, welches gleich oder noch unwahrscheinlicher ist als jenes, das wir beobachtet haben, unter der Annahme, dass H_0 stimmt. Unsere Beobachtung ist $v = 1$ und extremere Beobachtungen sind unter H_A, wenn $V \leq 1$ gilt (je kleiner V umso eher entspricht es unserer Alternative H_A). Also gilt (den Wert können wir aus der Tabelle der Binomialverteilung ablesen), dass

$$p = P(V \leq v | H_0) \approx 0.0625 = 6.25\%.$$

Da $p > \alpha$ können wir H_0 nicht verwerfen .

b) i) Der mächtigste Test den wir verwenden können ist der Z-Test, da dieser alle Informationen ausnutzt, die wir gegeben haben. Insbesondere haben wir in der Vorlesung gesehen, dass der t-Test nicht so mächtig ist .

ii) Die Nullhypothese ist wieder $H_0 : \mu \geq \mu_0 := 0.5$ und die Alternative $H_A : \mu < \mu_0$. Wieder haben wir einen einseitigen Test und können die Nullhypothese zu $H_0 : \mu = \mu_0$ vereinfachen .
Die Teststatistik ist $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, für X_i i.i.d. Zufallsvariablen mit gleicher Verteilung wie X. Unter H_0 gilt $\bar{X}_n \sim N(\mu_0, \sigma^2/n)$ bzw. $Z := \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$.

iii) Da wir einen linksseitigen Test durchführen, ist der Verwerfungsbereich für die Teststatistik Z gegeben durch $[-\infty, z_\alpha]$, wobei $\alpha = 0.05$ und somit $z_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha) = -\Phi^{-1}(1-\alpha) \approx -1.65$.
Unsere Beobachtung ist $z = \frac{\bar{x}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \approx -1.799$, welche im Verwerfungsbereich liegt. Daher können wir die Nullhypothese verwerfen und bekommen das Testergebnis, dass das Mittel wirklich eine Wirkung hat .

iv) Bevor wir die Macht des Tests berechnen können, brauchen wir die 5%-Verwerfungsgrenze, welche gegeben ist durch $z_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha) = -\Phi^{-1}(1-\alpha) \approx -1.65$. Dies kann aus der vorherigen Aufgabe abgelesen werden.
Unter H_A gilt $Z \sim N(\frac{\mu-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}, 1)$ und $Z_A := Z - \frac{\mu-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$.
Damit ist die Macht des Tests gegeben durch

$$\begin{aligned} P(Z < z_\alpha | H_A) &= P(Z_A < z_\alpha - \frac{\mu-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} | H_A) = \Phi(z_\alpha - \frac{\mu-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}) \\ &= \Phi(1) \approx 0.8413 = 84.13\%. \end{aligned}$$