Stochastik - Musterlösung
(BSc D-MAVT / BSc D-MATH / BSc D-MATL)

1. (10 Punkte)

a) ii)

b) iii)

c) ii)

d) i)

e) i)

f) iii)

g) iii)

h) i)

i) ii)

j) i)

2. (8 Punkte)

a) Definiere die folgenden zwei Ereignisse:
A: ein zufällig ausgewählter Patient leidet an Hepatitis A;
B: ein zufällig ausgewählter Patient leidet an Hepatitis B.
Dann gilt $P(A) = 1/10$, $P(B) = 1/20$. Wegen Unabhängigkeit gilt

$$P(A^c \cap B^c) = P(A^c)P(B^c) = \frac{9}{10}\frac{19}{20} = \frac{171}{200}.$$

b) Sei T das Ereignis *der Test ist positiv*. Dann gilt $P(T|A) = 0.95$, $P(T|A^c) = 0.05$. Mit dem Satz von Bayes erhält man

$$P(A|T) = \frac{P(T|A)P(A)}{P(T|A)P(A) + P(T|A^c)P(A^c)} = \frac{\frac{95}{100}\frac{1}{10}}{\frac{95}{100}\frac{1}{10} + \frac{5}{100}\frac{9}{10}} = \frac{95}{95+45} = \frac{95}{140} = \frac{19}{28}.$$

Bitte wenden!

c) Wir definieren die Anzahl an Hepatitis leidenden Patienten als

$$N = \sum_{i=1}^{1000} \mathbf{1}_{\{\text{Patient } i \text{ leidet an Hepatitis A oder B}\}}$$

und bemerken, dass die entsprechenden Bernoulli-Ereignisse unabhängig sind. Wegen $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1/10 + 1/20 - 1/200 = 29/200$ gilt

$$N \sim \text{Bin}\left(n = 1000, p = \frac{29}{200}\right).$$

Es gilt $E(N) = np = 145$ und $var(N) = np(1-p) = \frac{29 \cdot 171}{40} = \frac{4959}{40} = 123.975$. Mit dem ZGS finden wir

$$P(N > 150) = P\left(\frac{N - E(N)}{\sqrt{var(N)}} > \frac{5\sqrt{40}}{\sqrt{29 \cdot 171}}\right) \approx 1 - \Phi(0.449) \approx 1 - 0.673 = 0.327 = 32.7\%.$$

3. (12 Punkte)

a) Wenn X exponentialverteilt ist mit Dichte $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ $(x \geq 0)$, dann gilt

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}, \\ E[X^2] &= \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^\infty 2x e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}, \\ \text{Var}[X] &= E[X^2] - E[X]^2 = \frac{1}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Da T, U unabhängig sind, folgt

$$\begin{aligned} \text{Var}[V] &= \text{Var}[T] + \text{Var}[U] = \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} = \frac{41}{400} \\ \text{Cov}[T, V] &= \text{Cov}[T, T] + \text{Cov}[T, U] = \text{Var}[T] = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

b) Die Verteilungsfunktion F_V von V ist für $v \geq 0$ gegeben durch

$$\begin{aligned} F_V(v) = P[T + U \leq v] &= \int_0^v \left(\int_0^{v-u} 4e^{-4t} \cdot 5e^{-5u} dt\right) du \\ &= \int_0^v 5e^{-5u}\left(1 - e^{-4(v-u)}\right) du \\ &= 1 - e^{-5v} - \int_0^v 5e^{-4v-u} du \\ &= 1 - e^{-5v} - 5e^{-4v}\left(1 - e^{-v}\right) \\ &= 1 + 4e^{-5v} - 5e^{-4v}. \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

c) Die Wahrscheinlichkeit für eine Konventionalstrafe ist $P[V > 1] = 1 - F_V(1) = 5e^{-4} - 4e^{-5} \approx 6.46\%$.

d) Die Dichte von V ist $f_V(v) = \frac{d}{dv}F_V(v) = 20\left(e^{-4v} - e^{-5v}\right)$. Also der Erwartungswert der Kosten durch Konventionalstrafen gleich

$$\begin{aligned} E[10000(V-1)^+] &= \int_1^\infty 10000(v-1)20\left(e^{-4v} - e^{-5v}\right) dv \\ &= 10000 \int_0^\infty 20v\left(e^{-4v-4} - e^{-5v-5}\right) dv \\ &= 10000\left(5e^{-4} - 4e^{-5}\right) = 646.26 \end{aligned}$$

USD.

4. (12 Punkte)

1. a) Wie lautet die Nullhypothese?

(4) *Amadeo* ist gleich gut wie *Nathan*.

b) Von welchem Typus ist der Test?

(2) Gepaart & zweiseitig

c) (1) Die Nullhypothese H_0:

$$\mu_{Y-X} = 0$$

(2) Die Verteilung der Zufallsvariablen X und Y unter der Nullhypothese H_0:

$$(Y - X) \overset{d}{\sim} \mathcal{N}(\mu_{Y-X}, \sigma^2) \overset{d}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

(3) Die Teststatistik T:

$$T := \frac{(\bar{Y}_m - \bar{X}_n)\sqrt{n}}{S_{Y-X}}$$

(4) Die Verteilung der Teststatistik unter der Nullhypothese H_0:

$$T \overset{d}{\sim} t(n-1)$$

(5) Den Verwerfungsbereich: Mit der Quantilfunktion t_q der t-Verteilung hat man

$$\Big[-\infty, -t_q\big(n-1, 1-\alpha/2\big)\Big] \cup \Big[t_q\big(n-1, 1-\alpha/2\big), +\infty\Big]$$

Bitte wenden!

d) (1) Teststatistik T:

$$T = \frac{(84.22 - 81.44) \cdot \sqrt{9}}{6.48} = 1.287$$

(2) Verwerfungsbereich: Mit $t_q(8, 0.975) = 2.306$ folgt

$$\big[-\infty, -t_q(8, 0.975)\big] \cup \big[t(8, 0.975), +\infty\big] = [-\infty, -2.306] \cup [2.306, +\infty]$$

e) Die Teststatistik T liegt *nicht* im Verwerfungsbereich. Somit wird die Nullhypothese H_0 nicht verworfen. Die Empfehlung lautet:

(3) Sie können entweder *Amadeo* oder *Nathan* nehmen, es kommt nicht drauf an.