

**Stochastik**  
(BSc D-MAVT / BSc D-MATH / BSc D-MATL)

Schreiben Sie für Aufgabe 2-4 stets alle Zwischenschritte und -rechnungen sowie Begründungen auf. Aufgabe 1 ist eine Multiple Choice Aufgabe (keine Begründungen notwendig).

Die für die Aufgaben benötigten Tabellen (Normalverteilung, Quantile der t-Verteilung) wurden mit der Prüfung ausgeteilt.

1. (10 Punkte) Geben Sie jeweils die richtige Aussage an, indem Sie **einen Kreis um die entsprechende Ziffer** machen! Pro Teilaufgabe ist genau eine Aussage korrekt! Eine richtig beantwortete Teilaufgabe gibt 1 Punkt. Pro falsche Antwort gibt es 1 Punkt Abzug. Minimal erhält man für die gesamte Aufgabe 0 Punkte.

a) Sei  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  mit  $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ , und  $Z = 3X$ . Dann gilt

- i)  $Z \sim \mathcal{N}(0, 3)$ .
- ii)  $Z \sim \mathcal{N}(0, 9)$ .
- iii)  $Z \sim \mathcal{N}(0, \sqrt{3})$ .

b) Seien  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ,  $Y \sim \text{Exp}(1)$  Zufallsvariablen mit  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ . Dann gilt:

- i)  $X, Y$  sind unabhängig.
- ii)  $\text{Var}(X + Y) = 1$ .
- iii)  $E[XY] = 0$ .

c) Sei die Funktion  $f$  explizit gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} cx^3, & 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für welchen Wert von  $c$  stellt  $f$  eine Dichtefunktion dar?

- i)  $c = 4$ .
- ii)  $c = \frac{1}{4}$ .
- iii)  $c = 1$ .

**Bitte wenden!**

- d) In welchem Fall darf man annehmen, dass die Ereignisse  $A_1, \dots, A_n$ , bzw. die Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$ , *unabhängig* sind?
- $X_k =$  "Anzahl der Tore des  $k$ -ten Spieler des FC Zürich während der Saison 2008-2009" ( $n =$  Anzahl der Spieler des FC Zürich).
  - $A_k =$  "Es wird am  $k$ -ten Tag des September 2008 regnen" ( $n = 30$ ).
  - $X_k =$  "Länge des Aletschgletschers im Beobachtungsjahr  $k$ " ( $n =$  Anzahl der Beobachtungsjahre).
- e) Seien  $A$  und  $B$  Ereignisse mit  $P(A) > 0, P(B) > 0$ , und sei  $P(A|B) = P(B|A)$ . Dann gilt:
- $P(A) = P(B)$ .
  - $A$  und  $B$  sind disjunkt.
  - $A$  und  $B$  sind unabhängig.
- f) Seien  $A$  und  $B$  Ereignisse mit  $P(A) \neq 0, P(B) \neq 0$ . Dann gilt:
- Sind die Ereignisse unabhängig, so sind sie disjunkt.
  - Sind die Ereignisse abhängig, so sind sie disjunkt.
  - Sind die Ereignisse disjunkt, so sind sie abhängig.
- g) Die Aussage  $P(A \cup B) = P(A)P(B^c) + P(B)$  ist im Allgemeinen für beliebige Ereignisse  $A$  und  $B$
- Falsch.
  - Richtig.
  - Richtig, falls  $A$  und  $B$  unabhängig sind.
- h) Fehler 1. Art
- Der Fehler 1. Art tritt auf, wenn die Null-Hypothese  $H_0$  abgelehnt wird, obwohl sie richtig war.
  - Der Fehler 1. Art tritt auf, wenn die Null-Hypothese  $H_0$  akzeptiert wird, obwohl sie falsch war.
  - Der Fehler 1. Art ist gleich zum Fehler 2. Art beim 2-seitigen Test.
- i) Welche der folgenden Aussagen ist richtig?
- Wenn der Wert der Teststatistik im Verwerfungsbereich liegt, dann kann ein Fehler 1. Art nicht auftreten.
  - Wenn das Niveau eines Test vergrößert wird, dann vergrößert sich die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 1. Art.
  - Wenn wir ein 5%-Niveau Test durchführen und der  $P$ -Wert des Tests 0.0351 beträgt, dann können wir die Nullhypothese nicht verwerfen.
- j) Welche Aussage gilt für einen Test zum Niveau  $\alpha$ ?
- Je kleiner das Niveau  $\alpha$  ist, desto grösser wird der Fehler 2. Art.
  - $\alpha$  entspricht der Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art.
  - Das Niveau  $\alpha$  hat keine Beziehung mit dem Fehler 2. Art.

**Siehe nächstes Blatt!**

**2. (8 Punkte)** Am Unispital Zürich werden Tests für Hepatitis A und B durchgeführt. Aus Erfahrung weiss man, dass 10% der getesteten Patienten an Hepatitis A und 5% an Hepatitis B leiden. Die Ereignisse *an Hepatitis A leiden* und *an Hepatitis B leiden* treten unabhängig voneinander auf.

- a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Patient weder an Hepatitis A noch an Hepatitis B leidet.
- b) Ein Test soll erkennen, ob ein Patient Hepatitis A hat. Allerdings erkennt der Test fälschlicherweise 5% der Fälle von Hepatitis A nicht. Zudem diagnostiziert der Test bei 5% der Fälle Hepatitis A, bei denen kein Hepatitis A vorliegt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Patient Hepatitis A hat, falls der Test positiv ist (d.h. falls Hepatitis A diagnostiziert wird).
- c) Ein anderer Test soll erkennen, ob ein Patient eine Form von Hepatitis (A, B oder beides) hat. 1000 Leute werden getestet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit leiden mehr als 150 Leute an Hepatitis (A, B oder beidem), unter der Annahme, dass sich Patienten unabhängig voneinander mit Hepatitis anstecken? Verwenden Sie eine geeignete Normalapproximation.

**3. (12 Punkte)** In einem Güterhafen sei die Wartezeit in Tagen zum Einlaufen für ein Frachtschiff gegeben durch eine Zufallsvariable  $T$  und die Wartezeit in Tagen zum Auslaufen durch eine Zufallsvariable  $U$ . Wir nehmen an, dass  $T$  und  $U$  unabhängig sind und exponentialverteilt mit Erwartungswerten  $E[T] = \frac{1}{4}$  und  $E[U] = \frac{1}{5}$ . Sei  $V = T + U$  die Gesamtwartezeit in Tagen fürs Ein- und Auslaufen.

- a) Berechnen Sie die Varianz von  $V$ , sowie die Kovarianz von  $T$  und  $V$ .
- b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von  $V$ .

Eine Reederei einigt sich mit dem Hafengebtreiber, dass eine (von der Gesamtwartezeit  $V$  abhängige) Konventionalstrafe von  $10000(V - 1)$  USD fällig wird, falls die Gesamtwartezeit  $V$  für die Abfertigung eines Schiffes grösser als 1 Tag ist.

- c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird bei der Abfertigung eines Schiffes eine Konventionalstrafe für eine Zeitüberschreitung fällig?
- d) Berechnen Sie den Erwartungswert der Kosten, die für den Hafengebtreiber pro Abfertigung eines Schiffes aufgrund der Konventionalstrafen anfallen.

**Bitte wenden!**

#### 4. (12 Punkte)

1. Der Bauernverband *Biofarming* verglich die beiden Bio-Maissorten *Amadeo* und *Nathan*. Zu diesem Zweck haben 9 Biobauern jeweils die beiden Sorten angepflanzt und die Erträge bei der Ernte festgehalten. Die erhobenen Daten sehen wie folgt aus:

Bauer Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<i>Amadeo</i> ( $X$ )	93	77	93	93	84	65	71	77	80
<i>Nathan</i> ( $Y$ )	110	85	91	89	85	66	72	82	78

Erträge der beiden Maissorten in dt/ha für 9 Landwirtschaftsbetriebe  
(dt: Dezitonnen, ha: Hektare)

*Biofarming* möchte anhand dieser Untersuchung eine Empfehlung an ihre Mitglieder erarbeiten, welche der beiden Maissorten sie bevorzugt anpflanzen sollen. Beantworten Sie hierzu folgende Fragen.

- a) Wie lautet die Nullhypothese?

- *Nathan* ist besser als *Amadeo*.
- *Amadeo* ist besser als *Nathan*.
- Entweder *Amadeo* ist besser als *Nathan* oder *Nathan* ist besser als *Amadeo*.
- *Amadeo* ist gleich gut wie *Nathan*.

- b) Von welchem Typus ist der Test?

- Gepaart & einseitig
- Gepaart & zweiseitig
- Ungepaart & einseitig
- Ungepaart & zweiseitig

Aufgrund der gegebenen Daten lassen sich folgende statistischen Größen berechnen, wobei vorläufig noch keine expliziten Werte verwendet werden:

$$\bar{X}_n \quad \bar{Y}_m \quad S_X \quad S_Y \quad S_{Y-X} \quad S_{\text{pool}}$$

Des Weiteren stehen diese (unbekannten) Modellparameter zur Verfügung:

$$n = m \quad \mu_X \quad \mu_Y \quad \mu_{Y-X} \quad \sigma$$

Man nimmt vereinfachend an, dass die Erträge normalverteilt sind und alle Standardabweichungen  $\sigma$  übereinstimmen. Das Niveau wird auf  $\alpha := 5\%$  festgelegt.

**Siehe nächstes Blatt!**

c) Bestimmen Sie folgende Ausdrücke formal mit Hilfe obiger Variablen. Setzen Sie hierbei noch keine numerischen Werte ein!

- (1) Die Nullhypothese  $H_0$
- (2) Die Verteilung der Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  unter der Nullhypothese  $H_0$
- (3) Die Teststatistik  $T$
- (4) Die Verteilung der Teststatistik unter der Nullhypothese  $H_0$
- (5) Den Verwerfungsbereich

Führen Sie den Test aus Teil c) nun konkret mit den folgenden Werten durch.

$$\bar{X}_9 = 81.44 \quad \bar{Y}_9 = 84.22 \quad S_X = 10.17 \quad S_Y = 12.55 \quad S_{Y-X} = 6.48 \quad S_{\text{pool}} = 11.42$$

d) Berechnen Sie numerisch die Werte für

- (1) Die Teststatistik  $T$
- (2) Den Verwerfungsbereich

e) Wie lautet auf Grund des Testresultats die Empfehlung von *Biofarming* an ihre Mitglieder?

- Pflanzen Sie *Amadeo* an.
- Pflanzen Sie *Nathan* an.
- Sie können entweder *Amadeo* oder *Nathan* nehmen, es kommt nicht drauf an.
- Bio-Mais taugt nichts. Nehmen Sie statt dessen Gentech-Mais.