Stochastik - Musterlösung (BSc D-MAVT / BSc D-MATH / BSc D-MATL)

1. a) 3 b) 2 c) 2 d) 1 e) 1 f) 2 g) 1 h) 3 i) 2 j) 3

2. **a)** D bezeichne das Ereignis eines Defekts. E bezeichne das Ereignis eines positiven Testergebnisses. Dann gilt

$$\begin{aligned} P(\text{falsches Testergebnis}) &= P(D^c \cap E) + P(D \cap E^c) \\ &= P(E|D^c)P(D^c) + P(E^c|D)P(D) \\ &= \tfrac{1}{20}\tfrac{99}{100} + \tfrac{1}{20}\tfrac{1}{100} \\ &= \tfrac{1}{20} \\ &= 0,05. \end{aligned}$$

b) Wir haben

$$P(D) = \frac{1}{100}, \quad P(E|D) = \frac{19}{20}, \quad P(E|D^c) = \frac{1}{20}.$$

Nach der Formel von Bayes gilt

$$\begin{aligned} P(D|E) &= \tfrac{P(E|D)P(D)}{P(E|D)P(D)+P(E|D^c)P(D^c)} \\ &= \tfrac{\frac{19}{20}\frac{1}{100}}{\frac{19}{20}\frac{1}{100}+\frac{1}{20}\frac{99}{100}} \\ &= \tfrac{19}{118} \\ &\approx 0,1610 \end{aligned}$$

und

$$P(D^c|E) = \frac{99}{118} \approx 0,8390.$$

Also ist

$$P(D^c|E) > P(D|E).$$

Bitte wenden!

c) Aus der Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit folgt

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E|D)P(D) + P(E|D^c)P(D^c) \\ &= \tfrac{19}{20}\tfrac{1}{100} + \tfrac{1}{20}\tfrac{99}{100} \\ &= \tfrac{59}{1000} \\ &= 0,059. \end{aligned}$$

d) LD bezeichne das Ereignis eines Taschenrechners mit Defekt im Lager und LD^c sei das Komplement von LD. LE bezeichne das Ereignis eines Taschenrechners mit positivem Testergebnis im Lager. Gesucht ist $P[LD]$. Nach dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit gilt

$$P[LE] = P[LE|LD]P[LD] + P[LE|LD^c]P[LD^c].$$

Dies ist äquivalent zu

$$\frac{1}{4} = \frac{19}{20}P[LD] + \frac{1}{20}\big(1 - P[LD]\big).$$

Auflösen nach $P[LD]$ ergibt $P[LD] = 2/9$.

e) Sei $P(E|D) = p$. Gesucht ist $p \in [0,1]$, so dass $P(D|E) > 0,5$. Nach der Formel von Bayes gilt

$$P(D|E) = \frac{pP(D)}{pP(D) + (1-p)(1-P(D))}.$$

Die Bedingung ist äquivalent zu $p > 1 - P(D)$. Da in unserem Falle $P(D) = \frac{1}{100}$, folgt also $p \in (\frac{99}{100}, 1]$.

3. **a)** Aus $\int_{\frac{4}{3}}^{2} \frac{1}{(x-1)^2} dx = -(x-1)^{-1}\big|_{\frac{4}{3}}^{2} = -1 + 3 = 2$ folgt $c = \frac{1}{2}$.

b)

$$\begin{aligned} E[S] = \int_{\frac{4}{3}}^{2} \frac{cx}{(x-1)^2} dx &= c\left(-(x-1)^{-1}x\big|_{\frac{4}{3}}^{2} + \int_{\frac{4}{3}}^{2} (x-1)^{-1} dx\right) \\ =& c\left(-2 + 3\frac{4}{3} + \log(x-1)\big|_{\frac{4}{3}}^{2}\right) = c\left(2 - \log\left(\frac{1}{3}\right)\right) = 1 + \frac{\log(3)}{2}. \end{aligned}$$

c) Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{S \leq \frac{3}{2}\}$:

$$P[S \leq 3/2] = \int_{\frac{4}{3}}^{\frac{3}{2}} \frac{c}{(x-1)^2} dx = c\left(-(x-1)^{-1}\big|_{\frac{4}{3}}^{\frac{3}{2}}\right) = c\,(-2+3) = c = \frac{1}{2}.$$

Siehe nächstes Blatt!

d) Die Wahrscheinlichkeit, dass Michael nach 90 Minuten im Ziel ist, beträgt

$$F_M\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

"Zumindest einer der beiden ist im Ziel" ist das Komplement von "keiner ist am Ziel". So können wir die Unabhängigkeit von R und S gebrauchen:

$$P\left[\min(S,M) \leq \frac{3}{2}\right] = 1 - P\left[\min(S,M) > \frac{3}{2}\right] = 1 - P\left[S > \frac{3}{2}\right] P\left[M > \frac{3}{2}\right] = \frac{5}{8}.$$

e) Wir wollen die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{S < M\}$ berechnen. Dazu benötigen wir die gemeinsame Dichte. Da die beiden Zufallsvariablen unabhängig sind, ist dies das Produkt der Randdichten. Die Dichte von M ist die Ableitung der Verteilungsfunktion F_M. Für $x \in [1,2]$ gilt $f_M(x) = F_M'(x) = 2(x-1)$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
P\left[S < M\right] &= \int_{\frac{4}{3}}^{2} \int_{\frac{4}{3}}^{m} \frac{c}{(s-1)^2} 2(m-1) ds dm \\
&= \int_{\frac{4}{3}}^{2} \frac{-c}{(s-1)}\bigg|_{\frac{4}{3}}^{m} 2(m-1) dm \\
&= \int_{\frac{4}{3}}^{2} \frac{-c}{m-1} \cdot 2(m-1) dm + 3 \cdot c \int_{\frac{4}{3}}^{2} 2(m-1) dm \\
&= -c \cdot 2 \int_{\frac{4}{3}}^{2} dm + 3 \cdot c \int_{\frac{4}{3}}^{2} 2(m-1) dm \\
&= -c \cdot \frac{4}{3} + 3 \cdot c \cdot P\left[M > \frac{4}{3}\right] \\
&= -\frac{2}{3} + 3 \cdot c \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{9} - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3},
\end{aligned}$$

wobei $F_M\left(\frac{4}{3}\right) = (\frac{4}{3} - 1)^2 = \frac{1}{9}$ benutzt wurde.

f) i) Von den 450 Läufern (ohne Michael) sind 150 besser und 300 schlechter klassiert als er. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Läufer besser klassiert ist als Michael, beträgt somit $p = \frac{150}{450} = \frac{1}{3}$.

ii) Die Zufallsvariable X beschreibe die Anzahl Personen in der Gruppe, die besser klassiert sind als Michael. Diese Zufallsvariable hat eine hypergeometrische Verteilung. Wir betrachten 450 Personen; die Stichprobe beträgt 10 Läufer und wir interessieren uns für das Ereignis, dass genau 3 besser klassiert sind. Es gilt folglich

$$P[X = 3] = \frac{\binom{150}{3} \cdot \binom{300}{7}}{\binom{450}{10}}.$$

Bitte wenden!

4. a) Modellannahmen: Wir bezeichnen mit $X_1, \ldots, X_8$ die Messungen vor der Medikamenteneinnahme und mit $Y_1, \ldots, Y_8$ die Messungen danach. Es seien $D_i = Y_i - X_i$. Die Modellannahme besteht darin, dass $D_1, \ldots, D_8$ unabhängig und identisch verteilt sind mit einer zum Median m symmetrischen Verteilung.
Nullhypothese: H_0: $m = 0$.
Alternativhypothese: H_1: $m < 0$.
Teststatistik: $T = \sum_{D_i \text{ pos.}} \text{Rang}|D_i|$
Verwerfungsbereich: H_0 wird gemäss Tabelle zum Niveau 5% verworfen, falls $T \leq 5$.
Beobachtung:

	1	2	3	4	5	6	7	8
X_i	169	151	160	173	148	157	167	171
Y_i	161	156	148	162	155	147	161	150
D_i	-8	5	-12	-11	7	-10	-6	-21
Rang $\|D_i\|$	4	1	7	6	3	5	2	8

Also ist $T = \sum_{D_i \text{ pos.}} \text{Rang}|D_i| = 1 + 3 = 4$.
Testentscheid: H_0 wird auf dem 5%-Niveau verworfen, d.h. der Blutdruck von Hanspeter ist nach der Medikamenteneinnahme signifikant tiefer.

b) Die Likelihood-Funktion ist $L(\vartheta; x_1, \ldots, x_8) = \prod_{i=1}^{8} \frac{1}{10x_i} \exp\Big(-\frac{\pi(\log x_i - \vartheta)^2}{100}\Big)$ und die log-Likelihood-Funktion $\ell(\vartheta; x_1, \ldots, x_8) = \sum_{i=1}^{8} \log \frac{1}{10x_i} - \sum_{i=1}^{8} \frac{\pi(\log x_i - \vartheta)^2}{100}$. Nach der Definition des Maximum-Likelihood-Schätzers gilt

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta} \ell\big(\hat{\vartheta}_{\text{ML}}; x_1, \ldots, x_8\big) = -\frac{\pi}{50} \sum_{i=1}^{8} \big(\log x_i - \hat{\vartheta}_{\text{ML}}\big) = 0.$$

Also ist $\hat{\vartheta}_{\text{ML}} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^{8} \log x_i$.

c) Die Zufallsvariable X habe die Dichte f. Mit Hilfe der angegebenen Formel berechnet man

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^\infty \frac{1}{10} \exp\Big(-\frac{\pi(\log x - \vartheta)^2}{100}\Big)\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{10} \exp\Big(-\frac{\pi(y - \vartheta)^2}{100} + y\Big)\, dy = \exp\Big(\frac{25}{\pi} + \vartheta\Big). \end{aligned}$$

Also ist $\vartheta = \log E[X] - \frac{25}{\pi}$. Damit ist der Momenten-Schätzer gegeben durch

$$\hat{\vartheta}_{\text{MM}} = \log\left(\frac{1}{8} \sum_{i=1}^{8} x_i\right) - \frac{25}{\pi}.$$