Stochastik
(BSc D-MAVT / BSc D-MATH / BSc D-MATL)

Schreiben Sie für Aufgabe 2-4 stets alle Zwischenschritte und -rechnungen sowie Begründungen auf. Aufgabe 1 ist eine Multiple Choice Aufgabe (keine Begründungen notwendig).

Die für die Aufgaben benötigten Tabellen (Normalverteilung, Quantile der t-Verteilung) wurden mit der Prüfung ausgeteilt.

1. (10 Punkte)

Bei den folgenden 10 Fragen ist jeweils genau eine Antwort richtig. Es gibt pro richtig beantwortete Frage 1 Punkt und pro falsche Antwort 1/2 Punkt Abzug. Minimal erhält man für die gesamte Aufgabe 0 Punkte. **Bitte benützen Sie das beiliegende Antwortblatt.**

a) Seien A, B und C drei Ereignisse mit $P[A] > 0$ und $P[B|A] \geq P[C|A]$. Es gilt:

1) $P[A] \geq P[B]$ 2) $P[B] \geq P[C]$ 3) $P[A \cap B] \geq P[A \cap C]$

b) Seien A und B zwei Ereignisse mit $P[A \cap B^c] = 1/3$ und $P[A^c \cap B] = 1/4$, wobei A^c und B^c die Komplemente von A und B bezeichnen. Dann gilt:

1) $P[(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)] = 1/12$,
2) $P[(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)] = 7/12$,
3) $P[(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)]$ ist aus den Angaben nicht eindeutig bestimmbar.

c) Sei X eine binomialverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert $E[X] = 10$ und Varianz $\mathrm{Var}(X) = 5$. Für die Parameter n und p der Verteilung gilt:

1) $n = 100$ und $p = 1/10$,
2) $n = 20$ und $p = 1/2$,
3) n und p sind aus den Angaben nicht eindeutig bestimmbar.

d) Seien X und Y Zufallsvariablen mit Varianzen $\mathrm{Var}(X) = 1$ und $\mathrm{Var}(Y) = 2$, sowie Kovarianz $\mathrm{Cov}(X, Y) = -1$. Wie gross ist $\mathrm{Var}(X + Y)$?

1) 1 2) 2 3) 3

Bitte wenden!

e) Sei X eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert $E[X] = 0$. Dann gilt:

1) $E\left[X^3\right] = 0$,
2) $E\left[X^3\right] = 1$,
3) $E\left[X^3\right]$ lässt sich aus den Angaben nicht eindeutig bestimmen.

f) Seien X eine Zufallsvariable und f eine Funktion mit

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Dann gilt für $Y = f(X)$:

1) $E[Y] = 0$ 2) $E\left[Y^2\right] = 1$ 3) $\mathrm{Var}(Y) = 2$

g) Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen, die alle den gleichen Erwartungswert $E[X_i] = \mu$ und die gleiche Varianz $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2$ haben. Dann gilt:

1) $\frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^n X_i$ konvergiert gegen μ für $n \to \infty$.
2) $\frac{1}{\sqrt{n}}\Sigma_{i=1}^n X_i$ konvergiert gegen μ für $n \to \infty$.
3) $\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\Sigma_{i=1}^n X_i$ konvergiert gegen μ für $n \to \infty$.

h) Bei einem statistischen Test gilt:

1) Je grösser das Signifikanzniveau α ist, umso grösser ist der p-Wert.
2) Je grösser das Signifikanzniveau α ist, umso kleiner ist der p-Wert.
3) Weder 1) noch 2) ist richtig.

i) Bei einem statistischen Test gilt:

1) Je grösser das Signifikanzniveau α ist, umso eher behalten wir die Nullhypothese bei.
2) Je grösser das Signifikanzniveau α ist, umso eher verwerfen wir die Nullhypothese.
3) Weder 1) noch 2) ist richtig.

j) In einem Experiment hat man Beobachtungen

$$\begin{array}{ll} x_1, x_2, \ldots, x_n & \text{unter Versuchsbedingung 1,} \\ y_1, y_2, \ldots, y_m & \text{unter Versuchsbedingung 2.} \end{array}$$

Es gilt:

1) Wenn $n = m$ ist, handelt es sich immer um eine gepaarte Stichprobe.
2) Wenn $x_1 \leq \cdots \leq x_n$ und $y_1 \leq \cdots \leq y_m$ gilt, handelt es sich um eine gepaarte Stichprobe.
3) Wenn beide Versuchsbedingungen an derselben Versuchseinheit eingesetzt wurden, handelt es sich um eine gepaarte Stichprobe.

Siehe nächstes Blatt!

2. (10 Punkte) Ein Unternehmen produziert Taschenrechner. Es tritt der Sachverhalt auf, dass die Taschenrechner mit Wahrscheinlichkeit 1 zu 100 einen Defekt aufweisen. Die Ingenieure vom Qualitätsmanagement haben einen Test entwickelt, der den Defekt in 95% der Fälle erkennt und in 5% der Fälle positiv ausfällt, obwohl kein Defekt vorliegt. Hinweis: Die Rechenergebnisse sind auf 4 Nachkommastellen gerundet anzugeben.

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Taschenrechner ein falsches Testergebnis bekommt?

b) Zeigen Sie, dass ein Taschenrechner mit grösserer Wahrscheinlichkeit nicht defekt als defekt ist, wenn der Test positiv ist.

c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Test positiv ist?

d) In dieser Teilaufgabe betrachten wir ein spezielles Lager, in dem 25% der Taschenrechner positiv und 75% negativ getestet worden sind. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein aus diesem Lager zufällig gewählter Rechner defekt?

e) Nehmen Sie an, Sie könnten einen neuen Test entwickeln, der den Defekt mit Wahrscheinlichkeit p erkennt und mit Wahrscheinlichkeit $(1-p)$ positiv ausfällt, obwohl kein Defekt vorliegt. Bestimmen Sie alle Werte $p \in [0,1]$, so dass ein Taschenrechner mit grösserer Wahrscheinlichkeit defekt als nicht defekt ist, wenn der Test positiv ist.

3. (12 Punkte) Sebastian und Michael nehmen am Zürisee-Lauf teil. Die Laufzeit S von Sebastian (in Stunden) ist gemäss der Dichte

$$f_S(x) = \begin{cases} \frac{c}{(x-1)^2}, & x \in [\frac{4}{3}, 2], \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

verteilt. Michaels Laufzeit M (in Stunden) hat folgende Verteilungsfunktion

$$F_M(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ (x-1)^2, & 1 \leq x \leq 2, \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Laufzeiten von Sebastian und Michael sind unabhängig.

a) Wie muss c gewählt werden, damit f_S eine Wahrscheinlichkeitsdichte darstellt?

b) Berechnen Sie die erwartete Laufzeit von Sebastian.

c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sebastian nach 90 Minuten bereits am Ziel angekommen ist?

Falls diese Teilaufgabe nicht gelöst wird, kann man mit dem (nicht korrekten) Wert $1/3$ *fortfahren.*

d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass nach 90 Minuten zumindest einer der beiden bereits im Ziel ist.

e) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sebastian das Ziel vor Michael erreicht?

f) Von den 451 klassierten Teilnehmenden belegt Michael (als einziger) Platz 151. Nachdem alle Teilnehmenden am Ziel angekommen sind, trifft er auf eine Gruppe mit 10 anderen Teilnehmenden, die unabhängig von ihren Laufzeiten zusammengefunden haben und ebenfalls in der Rangliste aufgeführt sind.

i) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person dieser Gruppe besser klassiert ist als Michael?

ii) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von den 10 Personen genau 3 besser klassiert sind als Michael.
Hinweis: Hypergeometrische Verteilung. Die Wahrscheinlichkeit muss nicht numerisch ausgerechnet werden.

4. (12 Punkte) Hanspeter hat einen zu hohen Blutdruck. Sein Arzt gibt ihm das Medikament Reduswift, das den Blutdruck kurzfristig senken soll. Der Arzt möchte prüfen, ob Reduswift bei Hanspeter sofort die gewünschte Wirkung zeigt. An acht verschiedenen Tagen notiert er sich die folgenden Werte von Hanspeters Blutdruck (sogenannter systolischer Druck in Millimeter Quecksilbersäule) vor und nach der Medikamenteneinnahme:

	1	2	3	4	5	6	7	8
vorher	169	151	160	173	148	157	167	171
nachher	161	156	148	162	155	147	161	150

Da Reduswift nur kurzfristig wirkt, kann man annehmen, dass die Blutdruckwerte an verschiedenen Tagen unabhängig sind.

a) Führen Sie einen Wilcoxon-Test auf dem 5%-Niveau durch.

Kürzlich hat der Arzt einen Fachartikel gelesen, bei dem der gemessene Blutdruck einer Person als Zufallsvariable modelliert wird mit Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10x} \exp\left(-\frac{\pi(\log x - \vartheta)^2}{100}\right), & x > 0, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

wobei der Parameter ϑ von Person zu Person unterschiedlich ist. Der Arzt möchte nun das ϑ von Hanspeter schätzen basierend auf den obigen acht Werten vor der Medikamenteneinnahme. Leiten Sie Formeln her für einen Schätzer von ϑ mit

b) der Maximum-Likelihood-Methode,

c) der Momenten-Methode. *Hinweis: Sie können ohne zu beweisen die Formel* $\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-a(x-\vartheta)^2 + bx\right) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2}{4a} + \vartheta b\right)$ *für* $a > 0$ *und* $b \in \mathbb{R}$ *verwenden.*

Bei beiden Teilaufgaben muss der Schätzer nicht numerisch ausgerechnet werden.

Tabelle der 5%-Verwerfungsbereiche beim Wilcoxon-Test:

N	H_1: $m \neq 0$	H_1: $m < 0$	H_1: $m > 0$
4	—	—	—
5	—	$\{0\}$	$\{15\}$
6	$\{0\} \cup \{21\}$	$[0, 2]$	$[19, 21]$
7	$[0, 2] \cup [26, 28]$	$[0, 3]$	$[25, 28]$
8	$[0, 3] \cup [33, 36]$	$[0, 5]$	$[31, 36]$
9	$[0, 5] \cup [40, 45]$	$[0, 8]$	$[37, 45]$
10	$[0, 8] \cup [47, 55]$	$[0, 10]$	$[45, 55]$
11	$[0, 10] \cup [56, 66]$	$[0, 13]$	$[53, 66]$
12	$[0, 13] \cup [65, 78]$	$[0, 17]$	$[61, 78]$
13	$[0, 17] \cup [74, 91]$	$[0, 21]$	$[70, 91]$
14	$[0, 21] \cup [84, 105]$	$[0, 25]$	$[80, 105]$
15	$[0, 25] \cup [95, 120]$	$[0, 30]$	$[90, 120]$