Prof. Dr. P. Embrechts | ETH Zürich | Sommer 2012

Stochastik
(BSc D-MAVT / BSc D-MATH / BSc D-MATL)

Schreiben Sie für Aufgabe 2-4 stets alle Zwischenschritte und -rechnungen sowie Begründungen auf. Aufgabe 1 ist eine Multiple Choice Aufgabe (keine Begründungen notwendig).

Die für die Aufgaben benötigten Tabellen (Normalverteilung, Quantile der t-Verteilung, Vertrauensintervall für die Binomialverteilung, Verwerfungsbereiche für den Wilcoxon-Test) wurden mit der Prüfung ausgeteilt.

1. (10 Punkte)

Bei den folgenden 10 Fragen ist jeweils genau eine Antwort richtig. Es gibt pro richtig beantwortete Frage 1 Punkt und pro falsche Antwort 1/2 Punkt Abzug. Minimal erhält man für die gesamte Aufgabe 0 Punkte. **Bitte benützen Sie das beiliegende Antwortblatt.**

a) Seien A und B zwei Ereignisse mit $A \cap B = \emptyset$ sowie $\mathbb{P}(A) > 0$ und $\mathbb{P}(B) > 0$.

1. A und B sind nicht unabhängig.
2. A und B sind unabhängig.
3. Hängt von $\mathbb{P}(A)$ und $\mathbb{P}(B)$ ab ob 1 oder 2 gilt.

b) Seien X und Y unkorreliert und identisch verteilt mit Varianz strikt größer als 0.

1. $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(2X)$.
2. $\mathbb{V}(X+Y) \neq \mathbb{V}(2X)$.
3. Hängt davon ab ob X und Y unabhängig sind ob 1 oder 2 gilt.

c) Seien A und B zwei Ereignisse mit $\mathbb{P}(A) = 0.5, \mathbb{P}(B) = 0.3$ sowie $\mathbb{P}(A|B) = 0.5$.

1. $\mathbb{P}(B|A) = 0.3$.
2. $\mathbb{P}(B|A) = 0.5$.
3. $\mathbb{P}(B|A) = 0.7$.

Bitte wenden!

d) Wir betrachten einen binären Nachrichtenkanal bestehend aus Sender und Empfänger. Sowohl die "0" als auch die "1" werden mit gleicher Häufigkeit gesendet. Die Wahrscheinlichkeit dass eine gesendete "0" als "1" erkannt wird beträgt 0.1, die Wahrscheinlichkeit dass eine gesendete "1" richtig vom Empfänger erkannt wird ist 0.7. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine "0" gesendet wurde wenn eine "1" empfangen wurde?

1. Die Angabe ist widersprüchlich! Die Wahrscheinlichkeit dass eine gesendete "0" als "1" erkannt wird muss gemeinsam mit der Wahrscheinlichkeit dass eine gesendete "1" richtig erkannt wird in Summe die Wahrscheinlichkeit 1 ergeben.
2. $\frac{1}{4}$.
3. $\frac{1}{8}$.

e) Seien $0.8822979, 0.1150661, 0.5368463$ Realisierungen einer Uni $[0,1]$-verteilten Zufallsvariable. Sind die daraus generierten Zahlen $2.139598, 0.1222423, 0.7696963$ Realisierungen einer

1. $\mathcal{N}(0,1)$-verteilten Zufallsvariable?
2. Poi (1)-verteilten Zufallsvariable?
3. Exp (1)-verteilten Zufallsvariable?

f) Bei einem statistischen Test gilt:

1. Je größer der P-Wert desto eher wird die Nullhypothese verworfen.
2. Je kleiner der P-Wert desto eher wird die Nullhypothese verworfen.
3. Es hängt nicht vom P-Wert ab ob die Nullhypothese verworfen wird oder nicht.

g) Bei einem statistischen Test ist der Fehler 1.Art 2% und der P-Wert 0.015. Wie entscheidet der Test?

1. Kann aufgrund der Angaben nicht entschieden werden.
2. Die Nullhypothese wird nicht verworfen.
3. Die Nullhypothese wird verworfen.

h) Wir betrachten zwei z-Tests zum selben Niveau α und der selben Null- bzw. Alternativhypothese $H_0 : \mu = \mu_0$ bzw. $H_A : \mu > \mu_0$, auch die Stichprobengröße n ist bei beiden Tests gleich groß. Die weiteren Daten sind

Test 1:	Test 2:
$\sigma = 2$	$\sigma = 3$
$\overline{x}_n - \mu_0 = 3.43$	$\overline{x}_n - \mu_0 = 5.23$

Wenn Test 1 die Nullhypothese verwirft, dann

1. verwirft Test 2 die Nullhypothese nicht.
2. verwirft auch Test 2 die Nullhypothese.
3. kann daraus nicht gefolgert werden wie Test 2 entscheidet.

Siehe nächstes Blatt!

i) Bei einem Normal QQ-Plot werden die theoretischen Quantile (x-Achse) der Standardnormalverteilung mit den empirischen Quantilen (y-Achse) einer gegebenen Stichprobe der zu testenden Verteilung verglichen. Was kann man aus einer Geraden mit starkem Anstieg schließen?

1. Die Realisierungen stammen nicht aus einer Normalverteilung, da die Diagonale nur Steigung 1 hat.
2. Die Realisierungen stammen aus einer Normalverteilung mit Varianz größer als 1.
3. Die Realisierungen stammen aus einer Normalverteilung mit Varianz kleiner als 1.

j) Sei $p \in [0,1]$ und $X \sim \mathrm{Bin}(4,p)$. Bei welchen Beobachtungen von X verwirft der linksseitige Test mit Nullhypothese $H_0 : p = p_0 := 0.5$ zum 5% Niveau.

1. $x = 0$.
2. $x = 0$ und $x = 1$.
3. Der Test kann nicht verwerfen, das Niveau ist zu groß.

2. (7 Punkte) Wir betrachten drei, zunächst leere Urnen und eine Kugel. Es wird einmalig eine faire Münze geworfen. Erscheint "Zahl", so bleiben die Urnen leer. Erscheint "Kopf", dann wird die Kugel in eine der drei Urnen gelegt; hierbei wird Urne 1 mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$ gewählt, Urnen 2 und 3 jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1-p}{2}$.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit (in Abhängigkeit von p) befindet sich in Urne 1 eine Kugel?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit (in Abhängigkeit von p) befindet sich weder in Urne 1 noch in Urne 2 eine Kugel?

c) Wir öffnen nun Urne 1 und sehen, dass sich darin keine Kugel befindet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit (in Abhängigkeit von p) befindet sich nun eine Kugel in einer der drei Urnen?

d) Wir öffnen nun zusätzlich Urne 2 und sehen, dass sich auch darin keine Kugel befindet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit (in Abhängigkeit von p) befindet sich nun eine Kugel in Urne 3?

3. (8 Punkte) Im Folgenden sei e die Eulersche Zahl (d. h., $e = 2.71828...$). Weiters seien $\vartheta, \lambda > 0$ zwei positive reelle Zahlen und X eine Zufallsvariable mit der Dichtefunktion

$$f_X(x) := \begin{cases} \vartheta x & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{\lambda}{x} & 1 < x \leq e^2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Zeigen Sie dass $\vartheta = 2 - 4\lambda$.

b) Berechnen Sie $\mathbb{P}\left(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{2}\right)$ in Abhängigkeit von λ.

c) Berechnen Sie $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right)$ in Abhängigkeit von λ.

d) Berechnen Sie $\mathrm{Cov}\left(X, X^2\right)$ unter der Annahme $\vartheta = 0$ und $\lambda = \frac{1}{2}$.

e) Nehmen wir nun an es seien $\lambda = 0$ und $\vartheta = 2$. Sei die Zufallsvariable Z definiert durch $Z =: X^\alpha$ für einen Parameter $\alpha > -2$. Geben Sie einen Momentenschätzer für den Parameter α an, basierend auf n unabhängigen Beobachtungen von Z.

Bitte wenden!

4. (9 Punkte)

Nicola geht jeden Tag zur selben Zeit zur Arbeit. Um sein Büro zu erreichen, muss er einmal den Bus wechseln. Hin und wieder verpasst Nicola die Verbindung wegen einer Verspätung des ersten Busses. Also beschliesst er jeden Tag die Verspätung zu notieren mit der der erste Bus die Haltestelle erreicht, in der Nicola umsteigen muss. Diese wird durch die Zufallsvariable X beschrieben. Die gemessenen Zeiten in Minuten nach 10 Tagen sind wie folgt:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.4	0.8	0.9	2.4	0.2	0.1	0.1	0.3	1.9	0.2

Schon bei einer Verspätung von einer Minute verpasst Nicola die Anschlussverbindung. Nicola beschliesst die Verteilung von X durch die Paretoverteilung mit Parameter $\vartheta > 0$ zu modellieren, die entsprechende Dichte ist gegeben durch

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\vartheta}(1+x)^{-1-\frac{1}{\vartheta}} & \text{falls } x \geq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood Schätzer $\hat{\vartheta}$ für ϑ basierend auf n Beobachtungen, und berechnen Sie dessen Wert für die gegebene Stichprobe.

Falls Sie Punkt a) nicht gelöst haben verwenden Sie für die weitere Rechnung folgenden (falschen) Schätzer und dessen Wert für die gegebenen Stichprobe:

$$\hat{\vartheta}(X_1, \ldots, X_n) = \frac{1+n}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \log(1 + X_i).$$

b) Berechnen Sie, für den in Punkt a) geschätzten Wert von ϑ, die Wahrscheinlichkeit dafür dass Nicola am 11-ten Tag den Anschluss verpasst.

c) Ist der Schätzer für ϑ erwartungstreu?
Hinweis: Die Zufallsvariable $\log(1 + X)$ ist exponentialverteilt mit Parameter $\frac{1}{\vartheta}$.

d) Berechnen Sie die Varianz von $\hat{\vartheta}$ in Abhängigkeit vom wahren Parameter ϑ.
Hinweis: Beachten Sie den Hinweis in c).

Falls Sie Punkt d) nicht gelöst haben, rechnen Sie mit $\mathbb{V}\left(\hat{\vartheta}\right) = \frac{1+n}{n^2}\vartheta^2$ weiter.

e) Nehmen wir an, dass $\hat{\vartheta}$ erwartungstreu ist und der tatsächliche Wert von ϑ gleich 0.45 beträgt. Wie gross muss der Stichprobenumfang n mindestens sein, damit die Wahrscheinlichkeit dass der geschätzte Wert mehr als 0.05 vom tatsächlichen ϑ abweicht, unter 20% liegt.
Hinweis: Nehmen Sie an dass n gross ist und verwenden Sie eine geeignete Approximation.