Stochastik - Lösungsskizze
(BSc D-MAVT / BSc D-MATH / BSc D-MATL)

1. **a)** 2. **c)** 2. **e)** 1. **g)** 3. **i)** 1.

b) 2. **d)** 2. **f)** 3. **h)** 3. **j)** 1.

2. Seien

- $V = \{\text{Der Student hat sich auf die Aufgabe vorbereitet}\}$,
- $U = \{\text{Der Student hat sich nicht auf die Aufgabe vorbereitet}\} = V^c$,
- $R = \{\text{Die Aufgabe wird richtig gelöst}\}$.
- $F = \{\text{Die Aufgabe wird falsch gelöst}\} = R^c$.

Ferner wissen wir aus der Aufgabenstellung: $\mathbb{P}[V] = 3/10$, $\mathbb{P}[U] = 7/10$, $\mathbb{P}[R|V] = p_1$ und $\mathbb{P}[R|U] = p_2$.

a) Wir berechnen $\mathbb{P}[F]$ mit Hilfe des Gesetzes der totalen Wahrscheinlichkeit:

$$\mathbb{P}[F] = 1 - \mathbb{P}[R] = 1 - (\mathbb{P}[R|V]\mathbb{P}[V] + \mathbb{P}[R|U]\mathbb{P}[U]) = 1 - (p_1 \cdot 3/10 + p_2 \cdot 7/10).$$

b) Gesucht ist also $\mathbb{P}[U|R]$. Wir berechnen diese Wahrscheinlichkeit mit Hilfe der Bayes' Formel:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[U|R] &= \frac{\mathbb{P}[R|U]\mathbb{P}[U]}{\mathbb{P}[R]} \\
&= \frac{\mathbb{P}[R|U]\mathbb{P}[U]}{\mathbb{P}[R|V]\mathbb{P}[V] + \mathbb{P}[R|U]\mathbb{P}[U]} \\
&= \frac{p_2 \cdot 7/10}{p_1 \cdot 3/10 + p_2 \cdot 7/10} \\
&= \frac{7p_2}{3p_1 + 7p_2}.
\end{aligned}$$

c) Sei X die Anzahl richtig gelöste Aufgaben. Wir berechnen die gesuchte Wahrscheinlichkeit wie folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[\{X \geq 1\} \cap V] &= \mathbb{P}[X \geq 1|V]\mathbb{P}[V] \\
&= (1 - \mathbb{P}[X = 0|V])\mathbb{P}[V] \\
&= (1 - (1 - p_1)^5) \cdot \frac{3}{10}.
\end{aligned}$$

Bitte wenden!

d) Da die einzelnen Aufgaben unabhängig sind, wissen wir, dass X mit den Parametern $(5, p_1)$ Binomial verteilt ist, falls der Student sich auf die Aufgaben vorbereitet hat bzw. mit den Parametern $(5, p_2)$ falls der Student sich nicht auf die Aufgaben vorbereitet hat. Laut der Aufgabenstellung muss also $\mathbb{P}[U|X = 2]$ berechnet werden. Mit der Bayes' Formel erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[U|X=2] &= \frac{\mathbb{P}[X=2|U]\mathbb{P}[U]}{\mathbb{P}[X=2]} \\
&= \frac{\mathbb{P}[X=2|U]\mathbb{P}[U]}{\mathbb{P}[X=2|V]\mathbb{P}[V]+\mathbb{P}[X=2|U]\mathbb{P}[U]} \\
&= \frac{\binom{5}{2}\cdot p_2^2\cdot(1-p_2)^3\cdot 0.7}{\binom{5}{2}\cdot p_1^2\cdot(1-p_1)^3\cdot 0.3+\binom{5}{2}\cdot p_2^2\cdot(1-p_2)^3\cdot 0.7} \\
&= \frac{p_2^2\cdot(1-p_2)^3\cdot 7}{p_1^2\cdot(1-p_1)^3\cdot 3+p_2^2\cdot(1-p_2)^3\cdot 7}.
\end{aligned}$$

e) Sei $X_A = \{\text{Anzahl von Alice richtig beantwortete Fragen}\}$ und $X_B = \{\text{Anzahl von Bob richtig beantwortete Fragen}\}$. Gesucht ist also die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[X_A + X_B = k]$, wobei X_A und X_B voneinander unabhängig sind. Der Aufgabenstellung entnehmen wir, dass $X_A \sim \text{Bin}(5, p_1)$ und $X_B \sim \text{Bin}(5, p_2)$ sind. Mit dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X_A+X_B=k] &= \sum_{j=0}^{k\wedge 5}\mathbb{P}[X_A+X_B=k|X_B=j]\mathbb{P}[X_B=j] \\
&= \sum_{j=0}^{k\wedge 5}\mathbb{P}[X_A=k-j]\mathbb{P}[X_B=j] \\
&= \sum_{j=(k-5)\vee 0}^{k\wedge 5}\binom{5}{k-j}p_1^{k-j}(1-p_1)^{5-k+j}\binom{5}{j}p_2^j(1-p_2)^{5-j},
\end{aligned}$$

wobei $(k-5)\vee 0 = \max(k-5, 0)$ und $k \wedge 5 = \min(k, 5)$.

3. **a)** Falls $x \in (0, 1)$,

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,T}(x,t)\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} cx\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t \\
&= c\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\int_0^{\infty} x\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t \\
&= c\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right).
\end{aligned}$$

Für $x \notin (0, 1)$ ist $f_X(x) = 0$, da in diesem Fall $f_{X,T}(x, t) = 0$.

b)

$$1 \stackrel{!}{=} \iint_{\mathbb{R}^2} f_{X,T}(x,t)\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f_X(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 c\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{2c}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1 = \frac{2c}{\pi}.$$

Siehe nächstes Blatt!

Somit $c = \pi/2$.

c) Falls $t > 0$, und $x \in (0,1)$

$$f_{T|X=x}(t) = f_{X,T}(x,t)/f_X(x) = x\mathrm{e}^{-xt},$$

sonst $f_{T|X=x}(t) = 0$. Also $(T|X = x) \sim \mathrm{Exp}(\lambda = x)$.

d)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X < 0.5] &= \int_0^{1/2} f_X(x)\mathrm{d}x = \int_0^{1/2} \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\mathrm{d}x = \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^{1/2} \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 70.7\%\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\pi}{2}x\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\mathrm{d}x \\ &= \left[x\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\mathrm{d}x \\ &= 1 + \left[\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1 = 1 - \frac{2}{\pi}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\pi}{2}x^2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\mathrm{d}x \\ &= \left[x^2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1 - \int_0^1 2x\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\mathrm{d}x \\ &= 1 + \frac{2\cdot 2}{\pi}\left(\left[x\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\mathrm{d}x\right) \\ &= 1 + 0 + \frac{4}{\pi}\left[-\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1 \\ &= 1 - \frac{8}{\pi^2}\end{aligned}$$

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = 1 - \frac{8}{\pi^2} - \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)^2 = \frac{4}{\pi} - \frac{12}{\pi^2} = \frac{4(\pi - 3)}{\pi^2}$$

f) Sei $X_i \overset{\text{iid}}{\sim} F_X$, $i = 1, \ldots, 100$ und $S = \sum_{i=1}^{100} X_i$.
Des Weiteren sei $\mu = \mathbb{E}[X] = 0.3634$ und $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}[X]} = 0.24$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[S < 35] &= \mathbb{P}\left[\frac{S - 100\mu}{\sqrt{100}\sigma} < \frac{35 - 100\cdot 0.3634}{10\cdot 0.24}\right] \\ &\overset{\text{ZGS}}{\approx} \Phi(-0.56) = 1 - \Phi(0.56) = 1 - 0.7123 \\ &\approx 29\%.\end{aligned}$$

Bitte wenden!

4. **a)** Modell: $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \text{Be}(p)$, $n = 10$.

Nullhypothese: $H_0 : p = p_0 = 0.1$ und Alternativhypothese: $H_A : p > p_0$.

b) Teststatistik: $S_n = \sum_{i=1}^{10} X_i$ mit $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \text{Be}(p)$, $n = 10$. Unter H_0 ist $S_n \sim \text{Bin}(n = 10, p = p_0)$.

c) Um den Verwerfungsbereich zu bestimmen, suchen wir das kleinste c mit

$$\mathbb{P}_{p_0}[S_n \geq c] \leq 5\%,$$

also $95\% \leq \mathbb{P}_{p_0}[S_n \leq c - 1]$. Aus der Tabelle finden wir $c - 1 = 3$, also $c = 4$ und der Verwerfungsbereich ist gegeben durch

$$VB_{5\%} = \{4, 5, \ldots, 10\}.$$

Da der realisierte Wert der Teststatistik $s_n = 2 \notin VB_{5\%}$, wird die Nullhypothese nicht verworfen.

d) Die Macht des Tests unter der Annahme $p = 0.5 \in H_A$ ist gegeben durch

$$\mathbb{P}_p[S_n \in VB_{5\%}] = \mathbb{P}_{0.5}[S_n \geq 4] = 1 - \mathbb{P}_{0.5}[S_n \leq 3] = 0.8281.$$

e) Für den P-Wert erhalten wir mit der Tabelle für $p = p_0$

$$\mathbb{P}_{p_0}[S_n \geq 2] = 1 - \mathbb{P}_{p_0}[S_n \leq 1] = 1 - 0.7361 = 0.2639.$$